A. C. MORGADO / E. WAGNER / M. JORGE

GEOMETRIA II

(Métrica Plana)

LIVRARIA FRANCISCO ALVES EDITORA S. A.
Rio de Janeiro — São Paulo — Belo Horizonte
Recife — Curitiba

FICHA CATALOGRÁFICA

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte do Sindicato Nacional dos Editores de Livros, GB)

Morgado, Augusto César, 1944–

M845g Geometria II: métrica plana |por| A.C. Morgado, E. Wagner e M. Jorge. Rio de Janeiro, F. Alves, 1973

286p. ilust. cm

1. Geometria plana – Problemas e exercícios. I. Wagner, Eduardo, 1949– II. Jorge, Miguel. III. Título.

CDD 17. — 513.1
18. — 516.22

73-0460 CDU — 513.1

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO 1

DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM UMA RAZÃO

1.1 — Dizemos que o ponto M divide interiormente o segmento $\overline{AB}$ na razão k quando

$$\frac{MA}{MB} = k$$



1.2 — Dizemos que o ponto N divide exteriormente o segmento $\overline{AB}$ na razão k quando

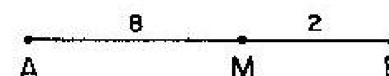
$$\frac{NA}{NB} = k$$



onde MA, MB, NA e NB representam as medidas dos segmentos $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{NA}$ e $\overline{NB}$ e $k > 0$.

Assim, em nosso curso vamos associar ao ponto P e ao segmento **AB** a razão $\frac{PA}{PB}$.

Exemplos



M divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{MA}{MB} = \frac{8}{2} = 4$

A divide $\overline{MB}$ na razão $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

B divide $\overline{AM}$ na razão $\dfrac{BA}{BM} = \dfrac{10}{2} = 5$

1.3 — TEOREMA

Dado um segmento $\overline{AB}$ e uma razão k, existe apenas um ponto M que divide interiormente o segmento nesta razão.

Demonstração



Consideremos um ponto M′ que divida interiormente o segmento na mesma razão. Temos, então,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} \quad e \quad \frac{MA + MB}{MB} = \frac{M'A + M'B}{M'B}$$

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AB}{M'B} \implies MB = M'B$$

Então, $M \equiv M'$.

1.4 — TEOREMA

Dado um segmento $\overline{AB}$ e uma razão k, existe apenas um ponto N que divide exteriormente o segmento nesta razão.

Demonstração

Consideremos um ponto N′ que divida exteriormente o segmento na razão. Temos que

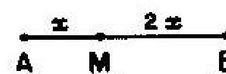
$$\frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B} \quad e \quad \frac{NA - NB}{NB} = \frac{N'A - N'B}{N'B}$$

$$\frac{AB}{NB} = \frac{AB}{N'B} \implies NB = NB'$$

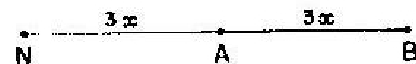
Então, $N \equiv N'$.

1.5 — OBSERVAÇÃO

Consideremos as divisões abaixo:

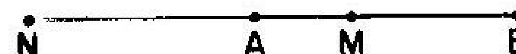


$$\frac{MA}{MB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{NA}{NB} = \frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}$$

Verificamos que, dado um segmento $\overline{AB}$ e uma razão $k \neq 1$ $(\frac{1}{2}$, por exemplo), conseguimos encontrar dois pontos que dividem $\overline{AB}$ nessa razão: um interior e outro exterior. Quando um segmento $\overline{AB}$ está dividido por dois pontos M e N, na mesma razão, dizemos que o segmento $\overline{AB}$ está dividido *harmonicamente*.

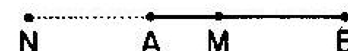


DIVISÃO HARMÔNICA

1.6 — DEFINIÇÃO

Dizemos que os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento AB quando

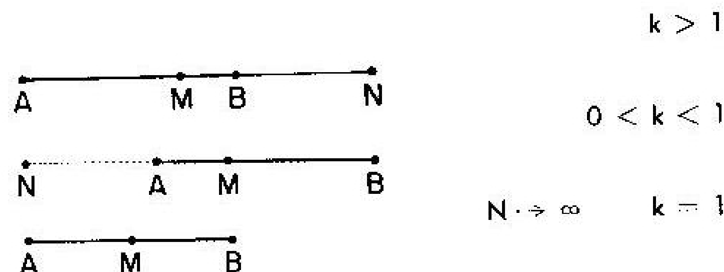
$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}.$$



Como $\dfrac{MA}{MB} = k$ e $\dfrac{NA}{NB} = k$, os pontos M e N dividem o segmento AB na mesma razão (um interiormente e outro exteriormente). Estes pontos chamam-se conjugados harmônicos de $\overline{AB}$ na razão k

1.7 — OBSERVAÇÃO

Quando a razão da divisão harmônica (k) é menor, maior ou igual a 1 (um) verificam-se facilmente as configurações abaixo.



1.8 — PROPRIEDADE

Em uma divisão harmônica existe a relação

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} \pm \frac{1}{AN}$$

$-$ para $k < 1$

$+$ para $k > 1$

1.° caso: $k > 1$

Demonstração

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

A M B N

$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN - AB}$$ ou

$$AM\,(AN - AB) = AN\,(AB - AM)$$

$$AM \cdot AN - AM \cdot AB = AN \cdot AB - AM \cdot AN \quad \therefore$$

$2\,AM \cdot AN = AN \cdot AB + AM \cdot AB$ e $\div$ por $AM \cdot AN \cdot AB$,

temos $$\boxed{\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}}$$

2.° caso: $k < 1$

Demonstração

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AB + AN}$$

$$AM\,(AB + AN) = AN\,(AB - AM)$$

$$AM \cdot AB + AM \cdot AN = AN \cdot AB - AM \cdot AN \quad \therefore$$

$2\,AM \cdot AN = AN \cdot AB - AM \cdot AN$ e $\div$ por $AM \cdot AN \cdot AB$,

temos $$\boxed{\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}}$$

1.9 — PROPRIEDADE

Em uma divisão harmônica existe a relação

$$OA^2 = OM \cdot ON$$

sendo O ponto médio de $\overline{AB}$.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

A O M B N

$$\frac{OM + OA}{OB - OM} = \frac{ON + OA}{ON - OB}$$

substituindo OB por OA, temos

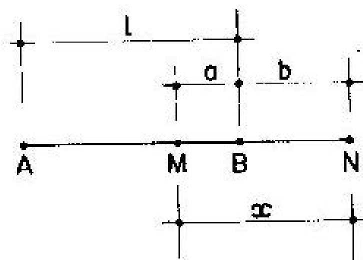
$$(OM + OA)\,(ON - OA) = (ON + OA)\,(OA - OM)$$

$$OM \cdot ON - OM \cdot OA + ON \cdot OA - OA^2 = ON \cdot OA - OM \cdot ON + OA^2 - OM \cdot OA$$

$$2\,OM \cdot ON = 2\,OA^2 \quad \therefore$$

$$\boxed{OA^2 = OB^2 = OM \cdot ON}$$

1.10 — DISTÂNCIA ENTRE DIVISORES HARMÔNICOS



Sejam M e N conjugados harmônicos de $\overline{AB}$. Assim,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k > 1.$$

Consideremos AB = l e

$\frac{MA}{MB} = k$ dados e calculemos x, que é a distância entre os divisores harmônicos de $\overline{AB}$ na razão $k > 1$.

1) $\frac{MA}{MB} = k$

$$\frac{l - a}{a} = k$$

$$l - a = ak \implies a = \frac{l}{k + 1}$$

2) $\frac{NA}{NB} = k$

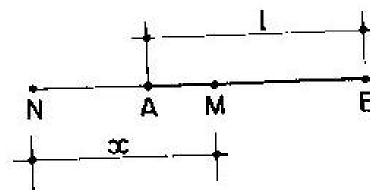
$$\frac{l + b}{b} = k$$

$$l + b = kb \implies b = \frac{l}{k - 1}.$$

Por 1) e 2), $x = a + b = \frac{l}{k + 1} + \frac{l}{k - 1} \implies$

$$\implies \boxed{x = \frac{2kl}{k^2 - 1}}$$

Por raciocínio análogo, caso considerássemos $k < 1$,



$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k < 1,$$

chegaríamos a $\boxed{x = \frac{2kl}{1 - k^2}}$

1.11 — Sejam A, B, C e D pontos de uma reta.

a) Se $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$, então $\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD}$.

De fato, basta permutar os meios ou os extremos de uma delas.

b)

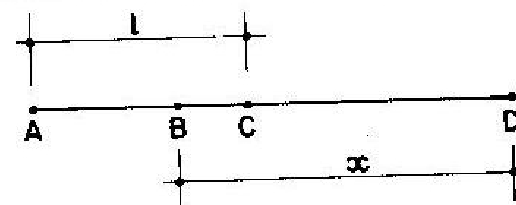


Vimos que B e D são divisores harmônicos de $\overline{AC}$ se A e C forem divisores harmônicos de $\overline{BD}$ e v. v.

Sejam $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} = k > 1.$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD} = k' < 1.$$

A relação entre k e k′ obtém-se da seguinte forma:



Se B e D são divisores harmônicos de $\overline{AC}$.
então, por 1.10,

$$x = \frac{2\,kl}{k^2 - 1} \qquad (1)$$

mas, se A e C dividem harmonicamente BD,

$$l = \frac{2\,k'x}{1 - k'^2} \qquad (2)$$

substituindo (2) em (1),

$$x = \frac{2k}{k^2 - 1} \cdot \frac{2\,k'\,x}{1 - k'^2} \implies$$

$$\implies \boxed{(k^2 - 1)(1 - k'^2) = 4\,kk'}$$ que, resolvida

para k e para k′, fornece

$$\boxed{k' = \frac{k - 1}{k + 1}} \quad e \quad \boxed{k = \frac{1 + k'}{1 - k'}} \qquad \begin{matrix} k > 1 \\ 0 < k' < 1 \end{matrix}$$

1.12 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Um segmento $\overline{AB}$ é tal que 7 AB = 3 CD. Qual será sua medida na unidade $\frac{1}{4}$ CD?

Solução

$$AB = \frac{3}{7}\,CD.$$

Seja $u = \frac{1}{4}$ CD ou CD = 4 u

$$AB = \frac{3}{7}\,4\,u$$

$$\frac{AB}{u} = \frac{12}{7}\,^*$$

Resposta: $\frac{12}{7}$

2. Se AB = 5 CD, calcule:

a) $\frac{3\,AB}{CD}$ b) $\frac{5\,AB}{3\,CD}$

Solução

a) $\frac{3\,AB}{CD} = \frac{3\,.\,5\,CD}{CD} = 15$

b) $\frac{5\,AB}{CD} = \frac{5\,.\,5\,CD}{CD} = 25$

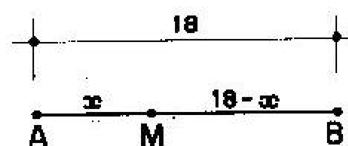
Respostas: a) 15
b) 25

3. Se M divide um segmento $\overline{AB}$, de 18 cm, interiormente na razão $\frac{2}{7}$, calcule MA e MB.

---

* $\frac{AB}{u}$ é a medida do segmento $\overline{AB}$ na unidade u.

Solução



$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{x}{18 - x} = \frac{2}{7}$$

$$7x = 36 - 2x$$

$$9x = 36$$

$$x = 4 \qquad \text{Logo,}$$

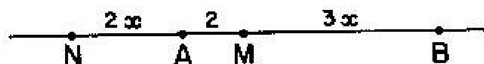
$$18 - x = 14$$

Respostas: $MA = 4$ cm

$MB = 14$ cm

4. Calcule x para que os pontos da figura abaixo formem divisão harmônica.

Solução



$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

$$\frac{2}{3x} = \frac{2x}{5x + 2}$$

$$6x^2 = 10x + 4$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \implies$$

$$\implies \quad x = 2$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

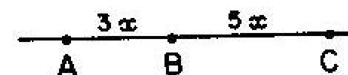
Resposta: $x = 2$

5. Considere os pontos A, B e C sobre uma reta.

Se $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{3}{5}$, calcule as razões $\dfrac{AB}{AC}$ e $\dfrac{CA}{CB}$

Solução

Se $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{3}{5}$, sejam $AB = 3x$ e $BC = 5x$



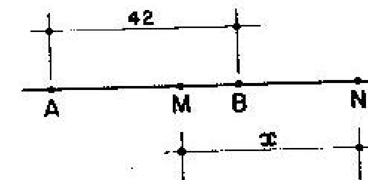
$$\frac{AB}{AC} = \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{7x}{5x} = \frac{7}{5}$$

Respostas: $\dfrac{3}{7}$ e $\dfrac{7}{5}$

6. Os pontos M e N dividem o segmento $\overline{AB}$ de 42 cm na razão $\dfrac{5}{2}$. Calcule MN.

Solução



Como $\dfrac{5}{2} > 1$,

temos, por 1.10,

$$x = \frac{2\,kl}{k^2 - 1} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 42}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1} = \frac{5.42}{\frac{21}{4}} = 40$$

Resposta: $x = 40$ cm

7. Os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{3}{2}$. Sabemos que os pontos A e B dividem o segmento $\overline{MN}$ harmonicamente. Calcule a razão desta divisão.

Solução

Temos $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k = \frac{3}{2} > 1.$

$$\frac{BM}{BN} = \frac{AM}{AN} = k' < 1.$$

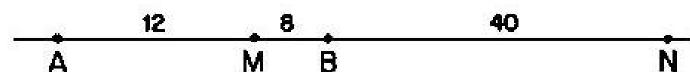
Por 1.11 a) e b) temos

$$k' = \frac{k-1}{k+1} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

Resposta: $k' = \frac{1}{5}$

Verificação

Repare agora o leitor na divisão abaixo



M e N divisores harmônicos de $\overline{AB}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{MA}{MB} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ \frac{NA}{NB} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} \end{array} \right\rangle K = \frac{3}{2}$

B e A divisores harmônicos de $\overline{MN}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{BM}{BN} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} \\ \frac{AM}{AN} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \end{array} \right\rangle k' = \frac{1}{5}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

8. Se A, B e C são pontos de uma reta (B entre A e C), sendo AC = 24 e BA = 5BC, então BC mede:

A) 3;
B) 4;
C) 5;
D) 6;
E) NRA.

9. Um segmento AB é tal que 3AB = 4CD. Qual a medida de CD se tomarmos como unidade $\frac{2}{5}$ de AB?

A) $\frac{3}{10}$;
B) $\frac{10}{3}$;
C) $\frac{8}{15}$;
D) $\frac{15}{8}$;
E) NRA.

10. Um segmento AB é igual a 5 vezes um segmento CD. Qual a razão entre $\frac{3}{2}$ AB e 4CD?

A) 6;
B) $\frac{3}{8}$;
C) $\frac{15}{2}$;
D) $\frac{15}{8}$;
E) NRA.

11. Qual a razão entre $\frac{5}{4}$ AB e $\frac{2}{3}$ CD?

A) $\frac{15}{8}$; C) $\frac{75}{8}$;

B) $\frac{25}{8}$; D) $\frac{16}{25}$;

E) NRA.

12. Se $AB = \frac{2}{3} CD$ e $CD = \frac{4}{5} MN$, $\frac{AB}{MN}$ é igual a:

A) $\frac{8}{15}$; C) $\frac{5}{6}$;

B) $\frac{15}{8}$; D) $\frac{6}{5}$;

E) NRA.

13. Sejam A, B e C nesta ordem sobre uma reta tais que $AB = 12$ e $BC = 3$. Seja D conjugado harmônico de B em relação ao segmento $\overline{AO}$. Então, BD mede:

A) 5; C) 8;

B) 6; D) 12;

E) NRA.

14. Determine x para que os pontos abaixo formem uma divisão harmônica.

A) 1; C) 4;

B) 2; D) 8;



E) NRA.

15. Determine x para que os pontos abaixo formem uma divisão harmônica.

A) 8; C) 11;

B) 10; D) 12;

E) 14.



16. Considerando a figura abaixo, podemos afirmar que os 4 pontos:



A) nunca formarão uma divisão harmônica;

B) sempre formarão uma divisão harmônica qualquer que seja;

C) formarão uma divisão harmônica se $x > 0$;

D) só formarão divisão harmônica se x for par;

E) NRA.

17. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{3}$. Se $AB = 40$, MN mede:

A) 24; C) 40;

B) 38; D) 42;

E) NRA.

18. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica. Se $AB = 7$ e $MN = 24$, a razão $\frac{MA}{MB}$ é igual a:

A) 2; C) $\frac{4}{3}$;

B) $\frac{3}{2}$; D) $\frac{5}{3}$;

E) NRA.

19. Os pontos P e Q pertencem ao interior do segmento $\overline{AB}$ e estão de um mesmo lado de seu ponto médio. P divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{2}{3}$ e Q divide AB na razão $\frac{3}{4}$. Se PQ = 2 AB mede:

A) 50; C) 70;

B) 60; D) 80;

E) 90.

20. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$. Se J é o ponto médio de MN, a razão $\frac{JA}{JB}$ vale:

A) k; C) k^2;

B) 2k; D) $k^2 - 1$;

E) NRA.

CAPÍTULO 2

FEIXE DE PARALELAS

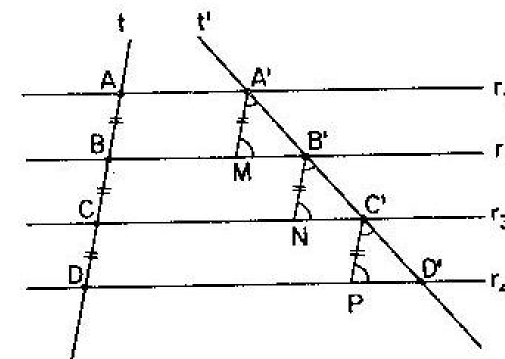
2.1 — TEOREMA

Se um feixe de paralelas determina sobre uma secante segmentos de mesmo comprimento, determinará sobre qualquer outra segmentos de mesmo comprimento.

H — $r_1 // r_2 // r_3 // r_4$

AB = BC = CD.

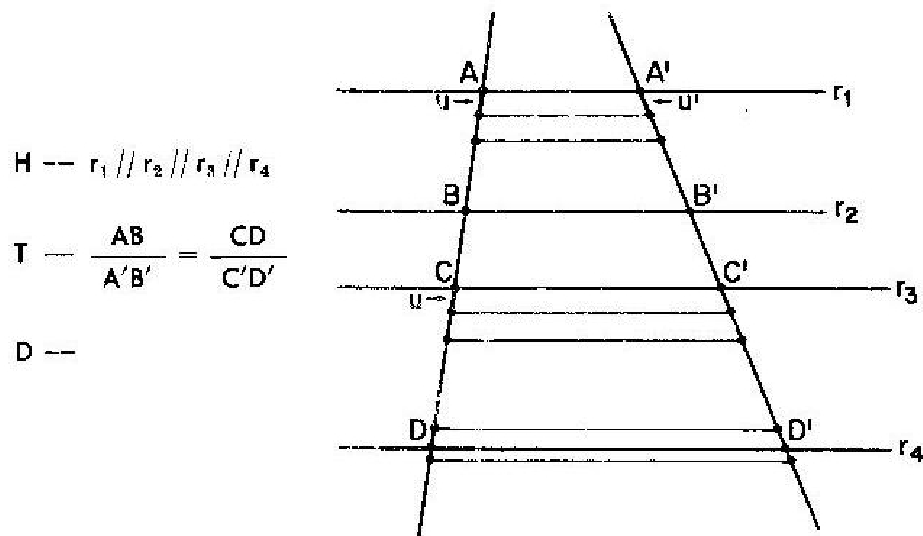
T — A'B' = B'C' = C'D'



D — De fato, como os triângulos A'MB', B'NC' e C'PD' são congruentes, pois possuem um lado de mesmo comprimento compreendido entre ângulos respectivamente congruentes,

A'B' = B'C' = C'D'. C.Q.D.

2.2 — Um feixe de paralelas determina sobre duas secantes quaisquer segmentos proporcionais.



Seja u um segmento que divide exatamente $\overline{AB}$ e cabe m vezes em $\overline{AB}$. Traçando paralelas ao feixe como mostra a figura, encontraremos u' na outra transversal que divide exatamente $\overline{A'B'}$ e cabe m vezes em $\overline{A'B'}$. Podemos, então, escrever

$$AB = mu \quad \text{e} \quad CD = mu'$$

É claro que u não tem obrigação de dividir $\overline{CD}$. Assim, marcando u sucessivamente em $\overline{CD}$, vamos supor que D esteja na n-ésima parte, ou seja, entre o (n-1)-ésimo e n-ésimo pontos de divisão. Traçando paralelas ao feixe, vemos que o mesmo se verifica na outra transversal. Podemos, então, escrever

$$(n-1)u < CD < nu \quad \text{e} \quad (n-1)u' < C'D' < nu'$$

Dividindo a primeira por mu e a segunda por mu',

$$\frac{n-1}{m} < \frac{CD}{AB} < \frac{n}{m} \quad \text{e} \quad \frac{n-1}{m} < \frac{C'D'}{A'B'} < \frac{n}{m}$$

ou

$$\frac{m}{n-1} > \frac{AB}{CD} > \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n-1} > \frac{A'B'}{C'D'} > \frac{m}{n}$$

se $n \to \infty$, $n - 1 \sim n$, $\frac{m}{n-1} \to \frac{m}{n}$ e, então, $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ ou ainda

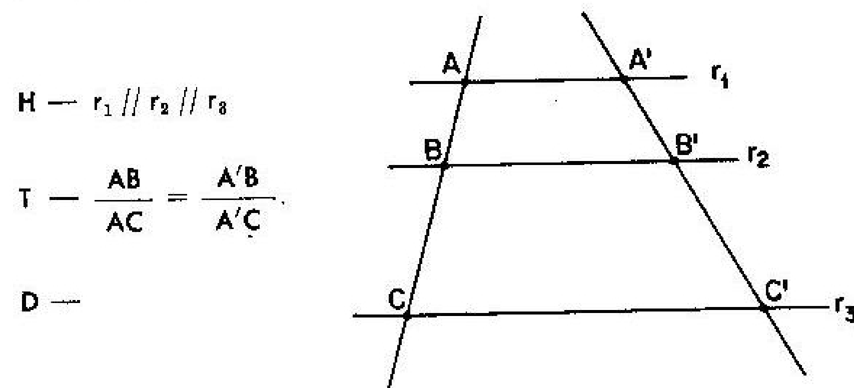
$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.}$$

Analogamente, podemos escrever

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \ldots\ldots = \frac{u}{u'}.}$$

2.3 — OBSERVAÇÃO

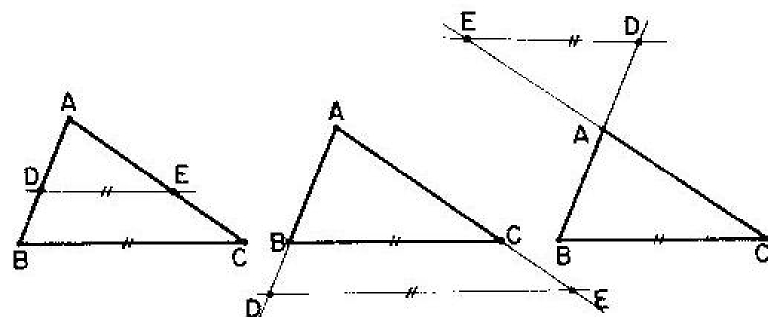
As razões homólogas são iguais em secantes atravessadas por feixe de paralelas.



De fato, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Longrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

2.4 — APLICAÇÃO NO TRIÂNGULO

Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina nos outros dois segmentos proporcionais e reciprocamente.



$$\boxed{\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC}.}$$

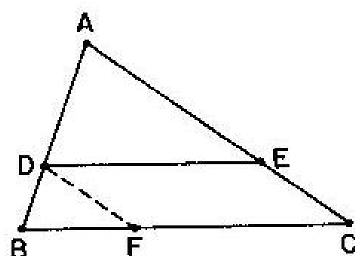
2.5 — TEOREMA

Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um outro de lados respectivamente proporcionais ao primeiro.

H — $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$

T — $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

D — Considerando 2.4, temos



$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \implies$$

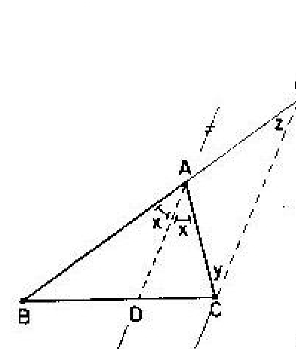
$\implies \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$, mas, sendo $\overline{DF} \,//\, \overline{AC}$, temos

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{DE}{BC} \qquad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.}$$

2.6 — TEOREMA DAS BISSETRIZES

As bissetrizes interna e externa de um triângulo dividem o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.



Demonstração

Seja AD a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$.

Tracemos $\overline{CE}$ paralela a $\overline{AD}$.

Temos

$\widehat{x} = \widehat{z}$ (correspond.)

$\widehat{x} = \widehat{y}$ (alt. int.)

$\implies \widehat{y} = \widehat{z}.$

O triângulo ACE é, portanto, isósceles.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}, \text{ e como } AE = AC,$$

$$\boxed{\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.}$$

Consideremos a bissetriz do ângulo externo $\hat{A}$ ($\overline{AD'}$).

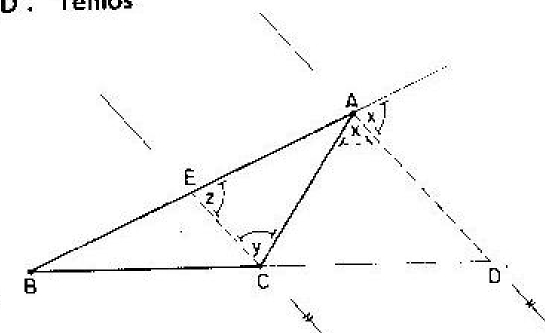
Tracemos $\overline{CE}$ paralela a $\overline{AD'}$. Temos

$\widehat{x} = \widehat{z}$

$\widehat{x} = \widehat{y}$

$\widehat{y} = \widehat{z}.$

O triângulo ACE é, portanto, isósceles.

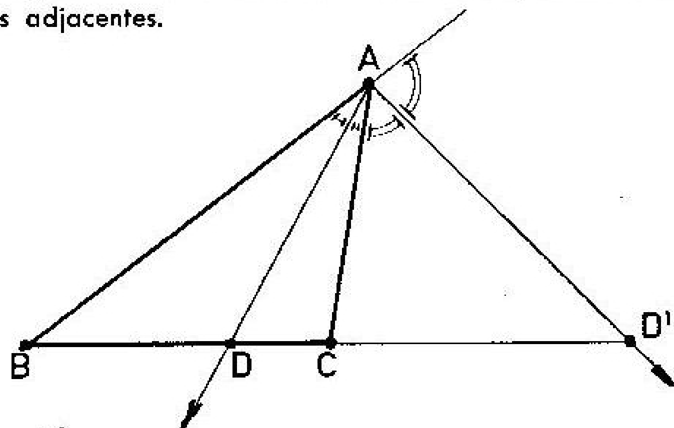


$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AE}, \text{ e como } AE = AC,$$

$$\boxed{\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}}$$

2.7 — DIVISÃO HARMÔNICA PELOS PÉS DAS BISSETRIZES

As bissetrizes interna e externa que partem de um mesmo vértice de um triângulo dividem harmonicamente o lado oposto na mesma razão dos lados adjacentes.



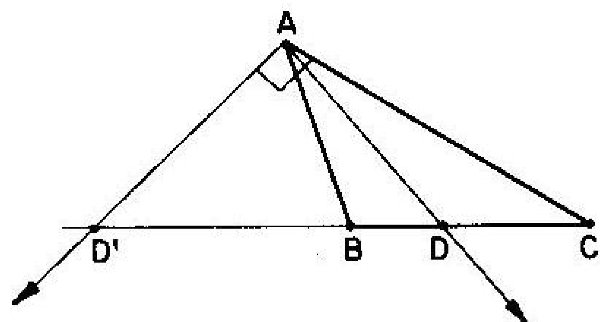
Seja $k = \frac{AB}{AC}$ razão dos lados que concorrem em A. Do teorema das bissetrizes, temos

$$\frac{DB}{DC} = k \qquad \frac{D'B}{D'C} = k$$

$$\Downarrow$$

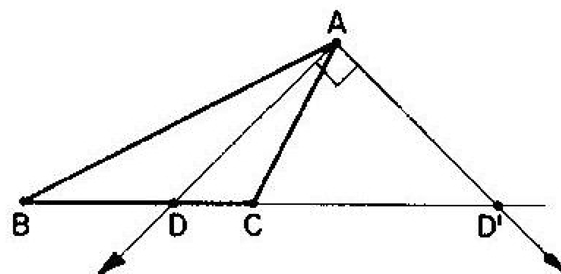
$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}.$$

O que mostra que D e D' dividem harmonicamente o lado $\overline{BC}$.

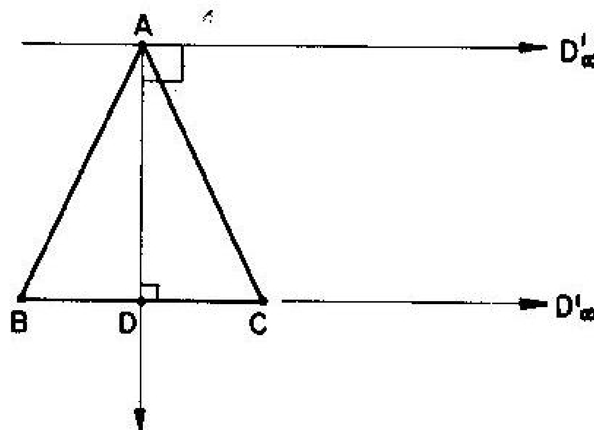


$$k = \frac{AB}{AC}$$

$0 < k < 1$



$k > 1$



$k = 1$

Para os casos I e II, podemos escrever

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Longrightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}.$$

Assim,

$$DB = \frac{ac}{b+c} \qquad \text{e}$$

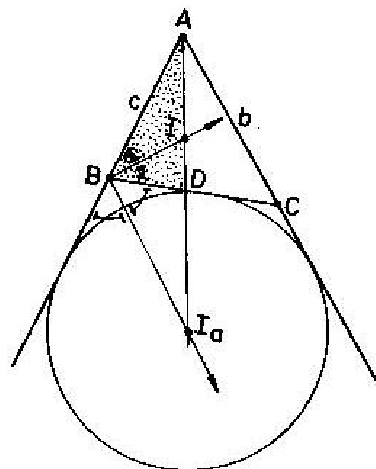
$$DC = \frac{ab}{b+c}$$

e, analogamente,

$$D'B = \frac{ac}{|b - c|} \quad \text{e}$$

$$D'C = \frac{ab}{|b - c|}$$

2.8 — DIVISÃO DA BISSETRIZ INTERNA, HARMONICAMENTE, PELO INCENTRO E EXINCENTRO



No triângulo ABD, $\overline{BI}$ e $\overline{BI}$a são bissetrizes interna e externa de B, dividindo $\overline{AD}$ harmonicamente.

A razão da divisão harmônica será

$$k = \frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD}, \text{ mas}$$

$$BA = C \text{ e } BD = \frac{ac}{b + c}.$$

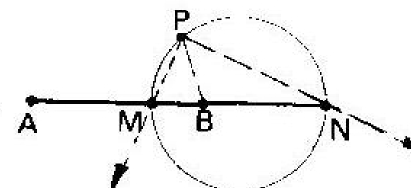
Então,

$$k = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \Longrightarrow \boxed{k = \frac{b + c}{a}}$$

e, analogamente, para as outras bissetrizes.

2.9 — CÍRCULO DE APOLONIUS

É o lugar geométrico dos pontos P tais que a razão PA/PB é igual a k, sendo k constante e A e B pontos fixos.



Conhecemos os pontos M e N pertencentes ao lugar que são os pontos que dividem o segmento AB interiormente e exteriormente na razão k.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k.$$

Seja P um ponto qualquer do lugar.

Como $\frac{PA}{PB} = k$, $\qquad \frac{PA}{PB} = \frac{MA}{MB}$.

Logo, $\overline{PM}$ é bissetriz interna do triângulo PAB. Da mesma forma,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}.$$

Portanto, $\overline{PB}$ é bissetriz externa do ângulo $\widehat{P}$ do triângulo PAB.

Como $\overline{PM}$ e PN são perpendiculares e os pontos M e N são fixos, o lugar geométrico de todos os pontos P é círculo de diâmetro $\overline{MN}$, sendo M e N os conjugados harmônicos do segmento $\overline{AB}$ na razão k.

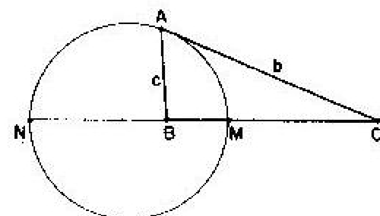
2.10 — RAIO DO CÍRCULO DE APOLONIUS

O diâmetro do círculo de Apolonius é a distância entre os conjugados harmônicos do segmento $\overline{AB}$ de comprimento l na razão $k > 0, \neq 1$.

Por 1.10 concluímos que o raio do círculo de Apolonius é dado por

$$r = \frac{kl}{|k^2 - 1|}.$$

Em um triângulo de lados a, b e c, teríamos



$$l = a$$

$$k = \frac{c}{b}. \quad \text{Logo,}$$

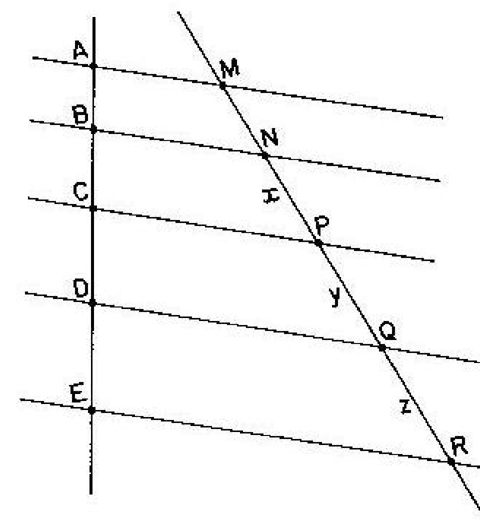
$$r = \frac{\frac{c}{b} \cdot a}{\frac{c^2}{b^2} - 1} \implies$$

$$\implies \quad r = \frac{abc}{|b^2 - c^2|}.$$

2.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

21. Considere sobre uma reta quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ de comprimentos respectivamente iguais a 8, 10, 12 e 15. Considere numa outra reta os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ proporcionais aos primeiros. Se MN = 10, calcule NP, PQ e QR.

Solução



$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{DE}{QR}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{10}{x} = \frac{12}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{10}{x} \implies x = 12{,}5$$

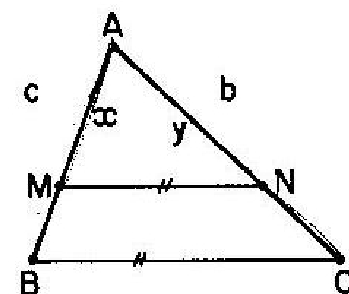
$$\frac{8}{10} = \frac{12}{y} \implies y = 15$$

$$\frac{8}{10} = \frac{15}{z} \implies z = 18{,}75.$$

Respostas: NP = 12,5
PQ = 15
QR = 18,75.

22. No triângulo ABC da figura AB = c e AC = b. Se AM = x e $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, calcule AN.

Solução



$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

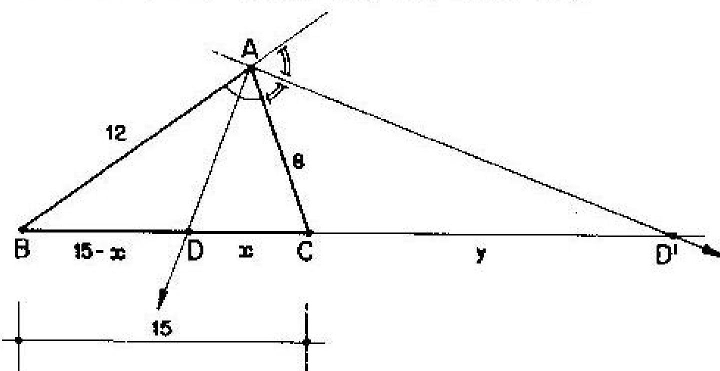
$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \implies$$

$$\implies \quad y = \frac{bx}{c}$$

Resposta: $AN = \dfrac{bx}{c}$.

23. Considere um triângulo ABC de lados AB = 12, AC = 8 e BC = 15. As bissetrizes interna e externa de $\widehat{A}$ encontram o lado oposto em D e D'. Calcule DB, DC, D'B e D'C.

Solução



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \implies \frac{15 - x}{x} = \frac{12}{8} \implies x = 6$$

$$DC = 6 \quad e \quad DB = 15 - 6 = 9.$$

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \implies \frac{y + 15}{y} = \frac{12}{8} \implies y = 30$$

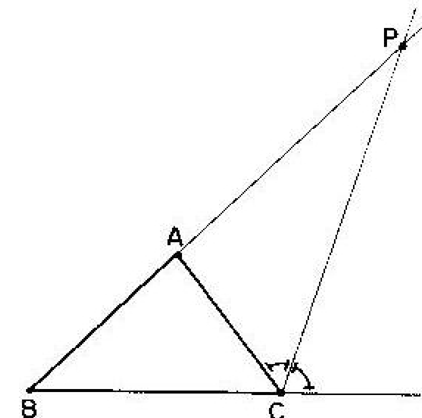
$$D'C = 30 \quad e \quad D'B = 30 + 15 = 45.$$

Respostas: DB = 9, DC = 6
D'B = 45, D'C = 30.

24. Em um triângulo ABC, $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{4}$. A bissetriz externa de C encontra a reta suporte de $\overline{AB}$ em P (A entre P e B). A razão $\frac{PA}{AB}$ é:

A) 1/3
B) 3/4
C) 4/3
D) 3/1
E) 7/1

Solução



Pelo teorema das bissetrizes,

$$\frac{PB}{PA} = \frac{CB}{CA} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{PB - PA}{PA} = \frac{4 - 3}{3}$$

$$\frac{AB}{PA} = \frac{1}{3} \implies \frac{PA}{AB} = 3$$

Resposta: D.

25. Em um triângulo ABC, as bissetrizes interna e externa de $\widehat{B}$ encontram o lado oposto em M e N. Se AC = 20, AB = 16 e AM = 10, calcule CB e BN.

Solução

Como os pontos A, M, B e N formam uma divisão harmônica, poderemos aplicar, por exemplo, a relação encontrada em 1 · 8 — 1.° caso.

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \implies \frac{2}{16} = \frac{1}{10} + \frac{1}{AN}$$

$$\frac{1}{AN} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40} \implies AN = 40 \implies BN =$$

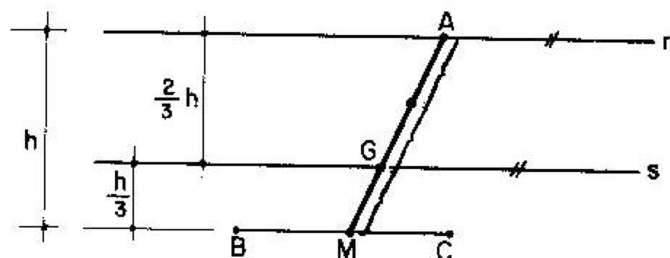
40 — 16 = 24. Como MB = 6, temos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} \implies \frac{10}{6} = \frac{20}{CB} \implies CB = 12$$

Respostas: CB = 12, BN = 2

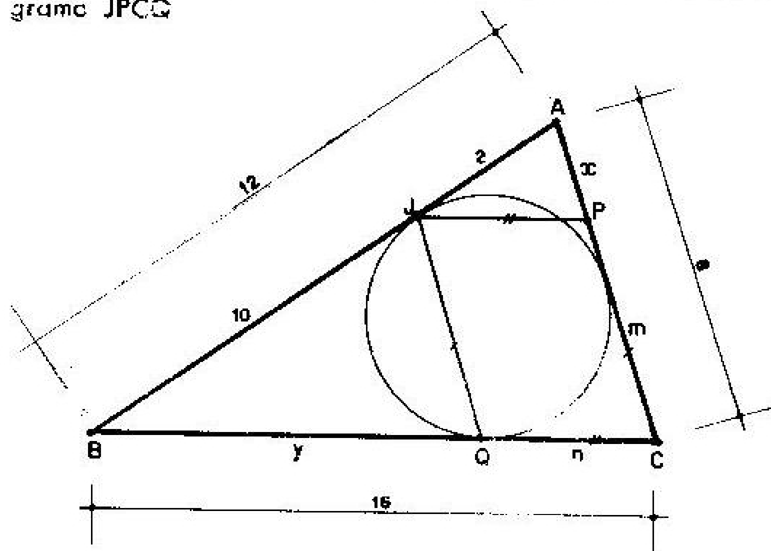
26. Em um triângulo ABC, a base $\overline{BC}$ é fixa e o ponto A percorre uma reta *r* paralela a BC. Determine o lugar geométrico do baricentro do triângulo.

Solução



Porque $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$, o lugar geométrico do ponto G é uma reta s paralela a r (s entre r e BC), distando $\frac{h}{8}$ de BC.

27. Em um triângulo ABC, AB = 12, AC = 8 e BC = 16. O círculo inscrito é tangente ao lado $\overline{AB}$ em J. Se $\overline{JP}$ e $\overline{JQ}$ são paralelas a $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, calcule o perímetro do paralelogramo JPCQ



Solução

O semiperímetro do triângulo ABC é $p = \frac{12 + 8 + 16}{2} = 18.$

$AJ = p - a = 18 - 16 = 2.$ Seja $AP = x$. Como $\overline{JP} // \overline{BC}$,

$$\frac{2}{x} = \frac{12}{8} \Longrightarrow x = \frac{4}{3} \Longrightarrow m = 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$

$BJ = p - b = 18 - 8 = 10.$ Seja $BQ = y$. Como $\overline{JQ} // \overline{AC}$,

$$\frac{10}{y} = \frac{12}{16} \Longrightarrow y = \frac{40}{3} \Longrightarrow n = 16 - \frac{40}{3} = \frac{8}{3}$$

O perímetro do paralelogramo JPCQ será

$$(2p)_{JPCQ} = 2(m + n) = 2\left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{56}{3}$$

Resposta: $\frac{56}{3}$

28. Calcule o raio do círculo de Apolonius construído sobre o segmento $\overline{AB}$ de 21 cm na razão $\frac{5}{2}$.

Solução

$$l = 21$$

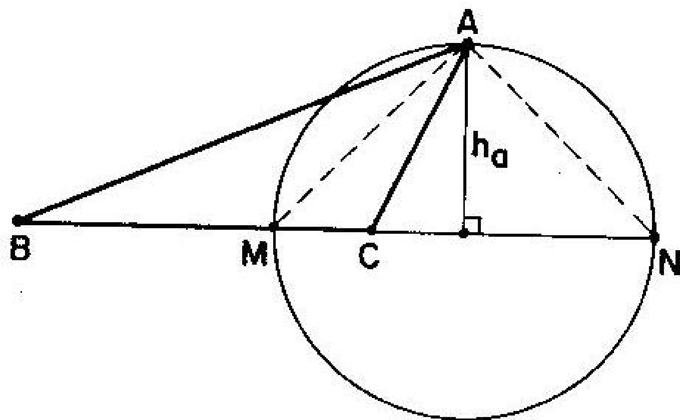
$$k = \frac{5}{2}.$$

Por 2.10, $$r = \frac{kl}{|k^2 - 1|} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 21}{\frac{25}{4} - 1} = 10$$

Resposta: r = 10 cm

29. Em um triângulo ABC, $BC = 12$ e $\frac{AB}{AC} = 2$, calcule o valor da altura relativa ao lado a, sabendo que ela é máxima.

Solução



Se $\frac{AB}{AC} = 2$, o vértice A pertence ao círculo de Apolonius construído sobre BC na razão 2. Se h_a é máxima, seu valor é igual ao raio do círculo de Apolonius.

$$l = 12$$

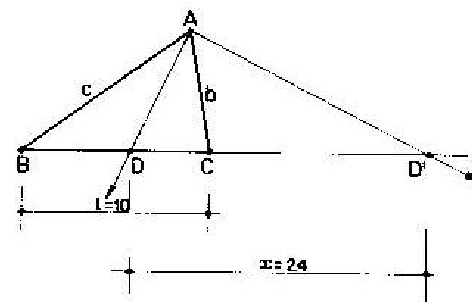
$$k = 2$$

$$h_a = r = \frac{kl}{|k^2 - 1|} = \frac{2 \cdot 12}{2^2 - 1} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$$

Resposta: $h_a = 8$

29-A. Em um triângulo ABC, de perímetro 30, o lado BC mede 10 e a distância entre os pés das bissetrizes que partem de A é igual a 24. Calcule os lados AB e AC do triângulo.

1.ª Solução



Calcularemos a razão da divisão harmônica $k = \frac{c}{b}$.

Por 1.10,

$$x = \frac{2kl}{k^2 - 1} \Longrightarrow 24 = \frac{2 \cdot k \cdot 10}{k^2 - 1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 6k^2 - 5k - 6 = 0 \quad \begin{cases} k = -\frac{1}{2} & \text{(não serve)} \\ k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

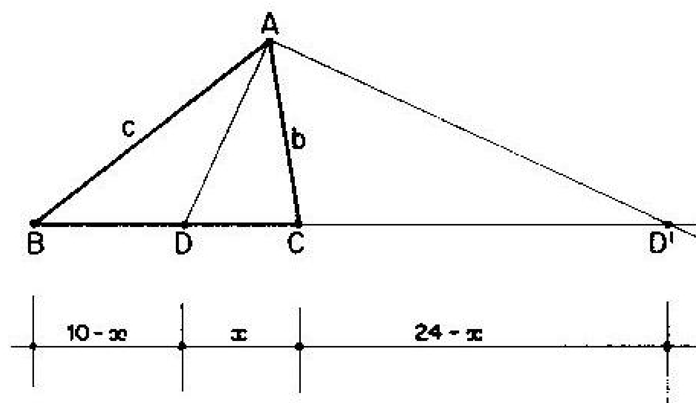
$$a + b + c = 30, \quad a = l = 10 \Longrightarrow b + c = 20$$

$$\frac{c}{b} = \frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{b + c}{b} = \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{20}{b} = \frac{5}{2} \Longrightarrow b = 8$$

$$\frac{c}{8} = \frac{3}{2} \Longrightarrow c = 12$$

2.ª Solução

Chegaremos a idêntico resultado a partir da definição de divisão harmônica sem necessidade de aplicação de fórmulas.



$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} \Longrightarrow \frac{10 - x}{x} = \frac{34 - x}{24 - x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (10 - x)(24 - x) = x(34 - x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 240 - 10x - 24x + x^2 = 34x - x^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 - 34x + 120 = 0 \quad \begin{cases} x = 30 & \text{(não serve)} \\ x = 4 \end{cases}$$

Então, $DC = 4$ e $DB = 6$. Como $b + c = 20$, temos

$$\frac{c}{6} = \frac{b}{4} = \frac{20}{10} = 2$$

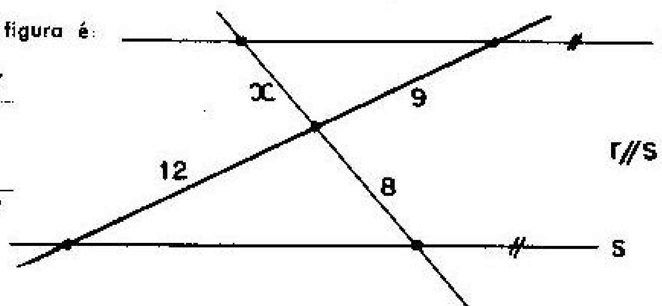
$$\frac{c}{6} = 2 \Longrightarrow c = 12$$

$$\frac{b}{4} = 2 \Longrightarrow b = 8$$

Resposta: $AB = 12$, $AC = 6$

PROBLEMAS PROPOSTOS

30. O valor de x na figura é:



A) $\frac{27}{2}$

B) $\frac{2}{27}$

C) 6

D) 4

E) NRA.

31. Em um triângulo ABC, de lados $AB = 9$, $AC = 12$ e $BC = 15$, traça-se $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{BC}$ passando pelo baricentro do triângulo (D em $\overline{AB}$ e E em $\overline{AC}$). O perímetro do triângulo ADE é:

A) 12 C) 20

B) 18 D) 24

E) NRA.

32. Em um triângulo ABC de lados $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 10$, o maior segmento que a bissetriz interna de $\widehat{A}$ determina sobre BC é:

A) 4 C) 6

B) 5,5 D) 7,5

E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 33 E 34.

Em um triângulo ABC de lados $AB = 15$, $AC = 6$ e $BC = 14$, seja I o ponto de concurso das bissetrizes internas $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$.

33. A razão $\frac{IA}{ID}$ vale:

A) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{7}$

B) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{7}{3}$

E) NRA.

34. A razão $\frac{IE}{IB}$ vale:

A) $\frac{6}{29}$ C) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{29}{6}$ D) 6

E) NRA.

35. Em um triângulo ABC de lados AB = 12, AC = 8 e BC = 10, a bissetriz interna de $\widehat{B}$ encontra a bissetriz $\overline{AN}$ externa de $\widehat{A}$ no ponto F. A razão $\frac{FN}{FA}$ vale:

A) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$

B) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$

E) NRA.

36. Em um triângulo ABC, BC = a e $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$, calcule o comprimento da altura relativa ao lado a sabendo que ela é máxima.

A) $h_a = a$ C) $h_a = \frac{5}{4}a$

B) $h_a = \frac{3}{2}a$ D) $h_a = \frac{5}{3}a$

E) $h_a = \frac{6}{5}a$

37. Em um triângulo ABC, BC = 16 e $h_a = 8$, calcule a razão $\frac{AB}{AC}$ sabendo que ela é máxima.

A) 2 C) $\frac{3}{2}$

B) 3 D) $\frac{4}{3}$

E) NRA.

38. Os lados do triângulo ABC medem AB = 6, AC = 9 e BC = 11. Se J é o ponto de tangência do círculo exinscrito relativo ao lado c com o lado $\overline{AB}$ e se $\overline{JL}$ é paralelo a BC, então AL vale:

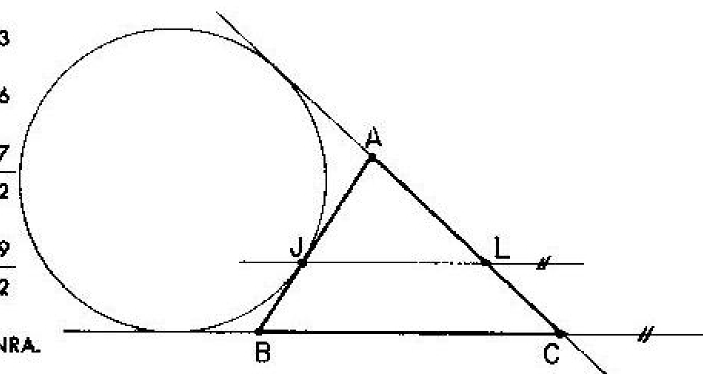
A) 3

B) 6

D) $\frac{7}{2}$

D) $\frac{9}{2}$

E) NRA.



39. Considere em um círculo de centro O um diâmetro AB. Prolongue uma corda $\overline{AP}$ qualquer do círculo de um comprimento PQ = AP. $\overline{QO}$ e $\overline{BP}$ cortam-se em J. Calcule a razão $\frac{JQ}{JO}$.

A) 3 C) 2

B) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{3}$

E) NRA.

40. Considere os quadrados ABCD e ABEF da figura. Se FG = 12 e GH = 4, calcule HC.

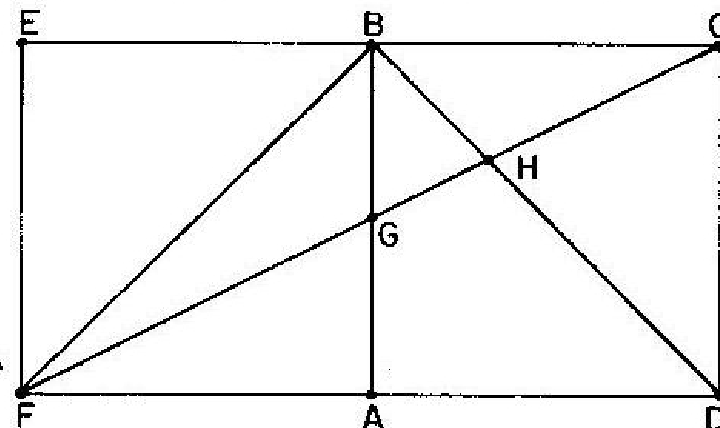
A) 9

B) 8

C) 6

D) 5

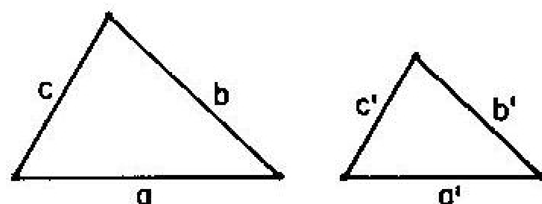
E) NRA



CAPÍTULO 3

3.1 — TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Se dois triângulos possuem lados respectivamente proporcionais, então são "semelhantes".



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

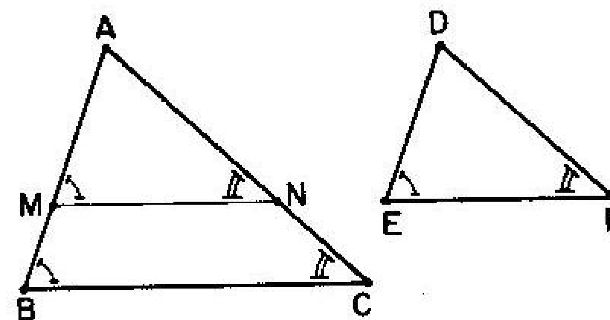
3.2 — TEOREMA

Dois triângulos que possuem seus ângulos respectivamente congruentes são semelhantes.

De fato, em 2.5 os triângulos ADE e ABC possuem mesmos ângulos internos e mostramos que seus lados são respectivamente proporcionais.

3.3 — RECÍPROCA

Se dois triângulos são semelhantes, seus ângulos internos são respectivamente congruentes.



H — $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

T — $\widehat{A} = \widehat{O}$

$\widehat{B} = \widehat{E}$

$\widehat{C} = \widehat{F}$.

D — Seja ΔAMN por construção, tal que

$$AM = DE \text{ e } \overline{MN} \parallel \overline{BC}.$$

De 2.5, temos

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Como $AM = DE$,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}. \qquad (1)$$

Mas, por hipótese,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}. \qquad (2)$$

Por (1) e (2), ΔAMN e ΔDEF são congruentes e

$$\widehat{A} = \widehat{D}, \quad \widehat{M} = \widehat{B} = \widehat{E}, \quad \widehat{N} = \widehat{C} = \widehat{F}$$

C. Q. D.

3.4 — CONCLUSÃO

Se ABC e A'B'C' são dois triângulos,

$$\begin{bmatrix} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{bmatrix} \iff \left[\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k\right]$$

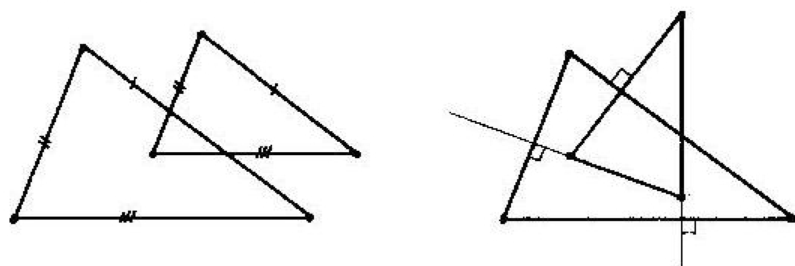
k é chamado razão de semelhança dos dois triângulos.

Da relação acima conclui-se que a razão entre os perímetros de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança, ou seja,

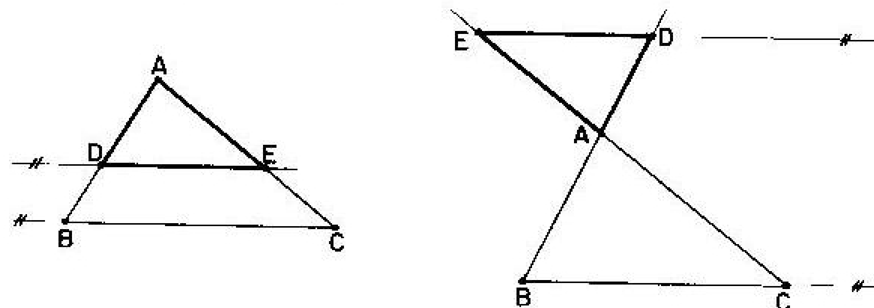
$$\frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = k \implies \boxed{\frac{(2p)_{ABC}}{(2p)_{A'B'C'}} = k.}$$

3.5 — OBSERVAÇÕES

a) Dois triângulos de lados respectivamente paralelos ou perpendiculares são semelhantes.



b) Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um outro semelhante ao primeiro

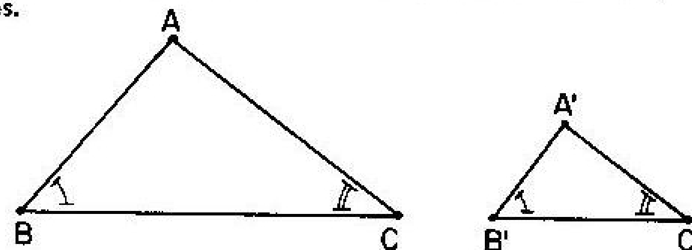


$\overline{DE} \,//\, \overline{BC} \implies \Delta ADE \sim \Delta ABC.$

3.6 — CASOS CLÁSSICOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1.° *caso*

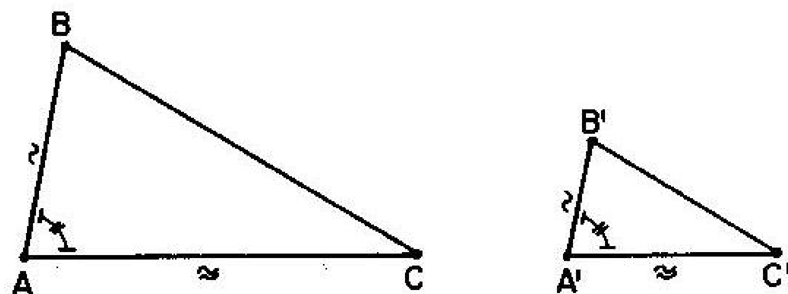
Se dois ângulos de um triângulo A'B'C' são respectivamente congruentes a dois ângulos de um triângulo ABC, esses triângulos são semelhantes.



$$\begin{bmatrix} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{bmatrix} \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \implies \begin{bmatrix} \hat{A} = \hat{A}' \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \end{bmatrix}$$

2.° *caso*

Se dois lados de um triângulo A'B'C' são respectivamente proporcionais a dois lados de um triângulo ABC e se forem congruentes os ângulos formados por esses lados, os triângulos são semelhantes.



$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \\ \widehat{A} = \widehat{A'}\end{array}\right] \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \dfrac{a}{a'} = k\end{array}\right]$$

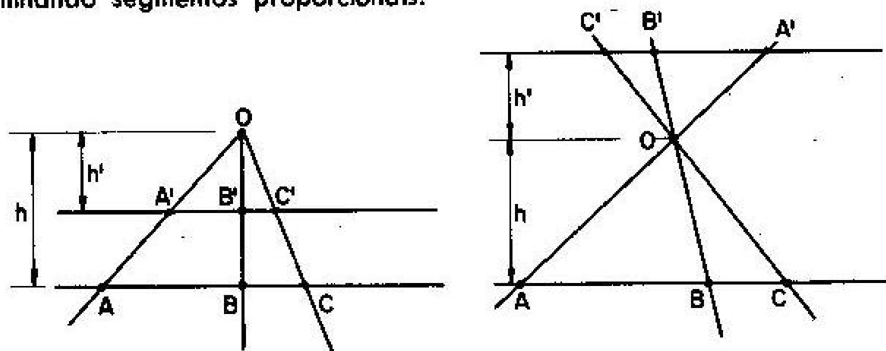
3.° caso

Se os três lados de um triângulo A'B'C' são respectivamente proporcionais aos três lados de um triângulo ABC, esses triângulos são semelhantes.

$$\left[\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k\right] \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'}\end{array}\right]$$

3.7 — FEIXE DE RETAS CONCORRENTES

Um par de paralelas intercepta um feixe de concorrentes, determinando segmentos proporcionais.



Da semelhança dos triângulos OA'B' e OAB, OB'C' e OBC temos, por 8.5, a) e b)

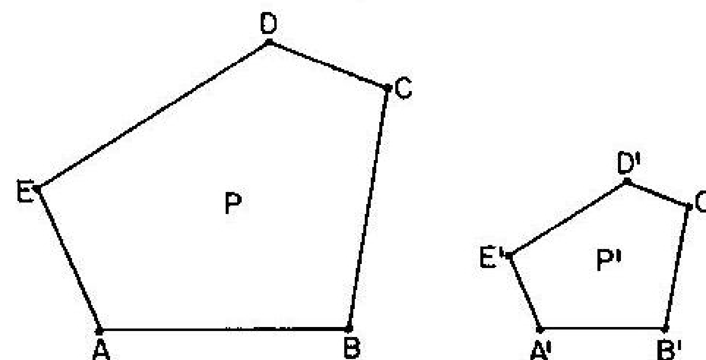
$$\boxed{\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC'}{OC} = \dots\dots = \dfrac{h'}{h}}$$

Verificamos também que da semelhança desses mesmos triângulos os segmentos homólogos determinados nas paralelas são proporcionais, ou seja,

$$\boxed{\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dots\dots = \dfrac{h'}{h}}$$

3.8 — POLÍGONOS SEMELHANTES

3.8.1 — Dois polígonos são semelhantes se os ângulos internos forem ordenadamente congruentes e se os lados que formam ângulos congruentes forem proporcionais.



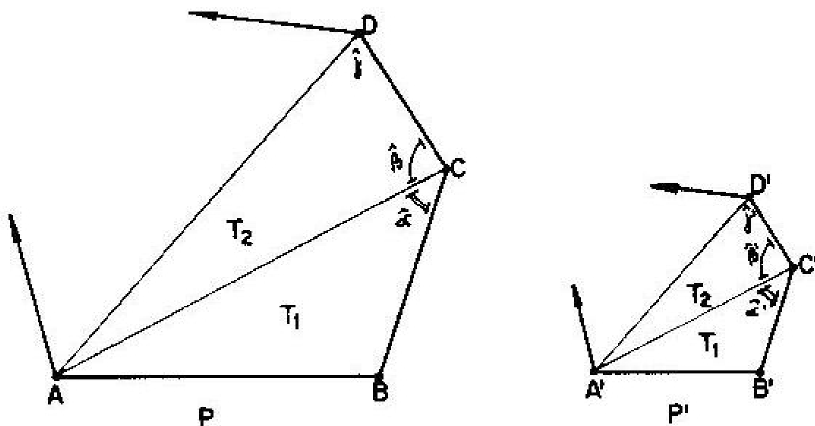
$$P \sim P' \Longrightarrow \begin{bmatrix} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \\ \vdots \\ e \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \ldots = k \end{bmatrix}$$

3.8.2 — A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança.

Da proporcionalidade dos lados homólogos conclui-se imediatamente

$$\boxed{\frac{(2p)_P}{(2p)_{P'}} = k}$$

3.8.3 — Dois polígonos semelhantes podem ser divididos em igual número de triângulos ordenadamente semelhantes.



Nos dois polígonos tracemos todas as diagonais possíveis por A e A', dividindo cada polígono em n − 2 triângulos (n = gênero).

H — $P \sim P'$ (com as implicações de 3.8)

T — $T_1 \sim T_1'$

$T_2 \sim T_2'$

etc.

D — $$\begin{bmatrix} \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k \end{bmatrix} \Longrightarrow T_1 \sim T_1' \Longrightarrow \begin{bmatrix} \widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}' \\ \dfrac{AC}{A'C'} = k \end{bmatrix}$$

(2.° caso)

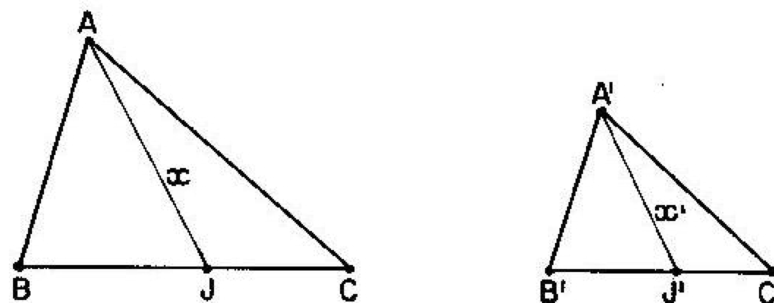
mas, se $\widehat{C} = \widehat{C}'$ e $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'$, então $\widehat{\beta} = \widehat{\beta}'$ e, então, temos

$$\begin{bmatrix} \widehat{\beta} = \widehat{\beta}' \\ \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = k \end{bmatrix} \Longrightarrow T_2 \sim T_2' \Longrightarrow \begin{bmatrix} \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}' \\ \dfrac{AD}{AD'} = k \end{bmatrix}$$

(2.° caso)

e assim sucessivamente, ficando provado o Teorema.

3.8.4 — Em quaisquer polígonos semelhantes a razão de duas linhas homólogas é igual à razão de semelhança.



Sejam dois triângulos ABC e A'B'C' semelhantes na razão k. Sejam J e J' pontos que dividem $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ na mesma razão m. Vamos provar que x e x' guardam mesma razão k.

$$H — \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = k$$

$$\frac{JB}{JC} = m$$

$$\frac{J'B'}{J'C'} = m$$

$$T — \frac{x}{x'} = k.$$

$$D — \frac{JB}{JC} = m \qquad \frac{J'B'}{J'C'} = \frac{m+1}{m}$$

$$\frac{JB + JC}{JB} = \frac{m+1}{m} \qquad \frac{J'B' + J'C'}{J'B'} = \frac{m+1}{m}$$

$$\frac{BC}{JB} = \frac{m+1}{m} \qquad \frac{B'C'}{J'B'} = \frac{m+1}{m}$$

dividindo membro a membro,

$$\frac{\frac{BC}{JB}}{\frac{B'C'}{J'B'}} = 1$$

$$\frac{BC}{JB} = \frac{B'C'}{J'B'} \quad \text{ou} \quad \frac{JB}{J'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k.$$

Assim, os triângulos ABJ e A'B'J' são semelhantes na razão k e, então,

$$\boxed{\frac{x}{x'} = k.}$$

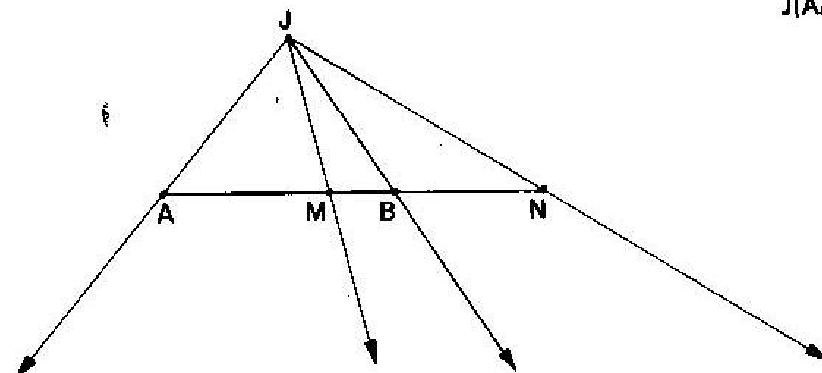
Assim, a razão de semelhança de dois triângulos é igual

— à razão entre dois lados homólogos,
— à razão entre os perímetros,
— à razão entre duas medianas homólogas,
— à razão entre duas alturas homólogas etc.

3.9 — FEIXE HARMÔNICO

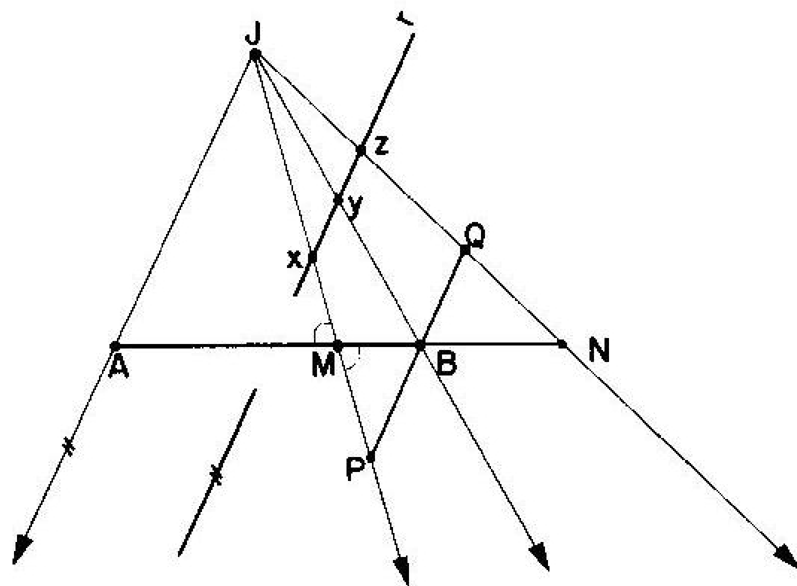
3.9.1 — Se os pontos A, M, B e N formam uma divisão harmônica e se J é um ponto não pertencente à reta que os contém, JA, JM, JB e JN formam um feixe harmônico.

Notação: J(AMBN)



3.9.2 — Teorema

Se uma reta é paralela a um dos raios de um feixe harmônico, os outros três raios determinam segmentos congruentes e reciprocamente.



Consideremos um feixe harmônico J(AMBN) e uma reta r paralela a JA determinando os segmentos $\overline{xy}$ e $\overline{yz}$, que mostraremos serem congruentes.

Seja $\overline{PBQ}$ paralela a r.

$$\Delta\, JMA \sim \Delta\, PMB \implies \frac{JA}{PB} = \frac{MA}{MB} = k.$$

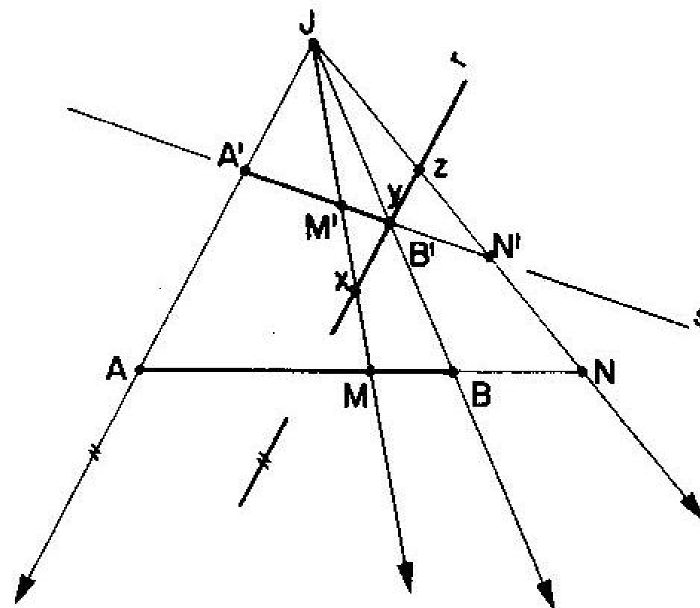
$$\Delta\, NJA \sim \Delta\, NBQ \implies \frac{JA}{BQ} = \frac{NA}{NB} = k.$$

Daí conclui-se que PB = BQ e que

$$\boxed{xy = yz.}$$

3.9.3 — Teorema

Um feixe harmônico determina em qualquer secante quatro pontos em divisão harmônica.

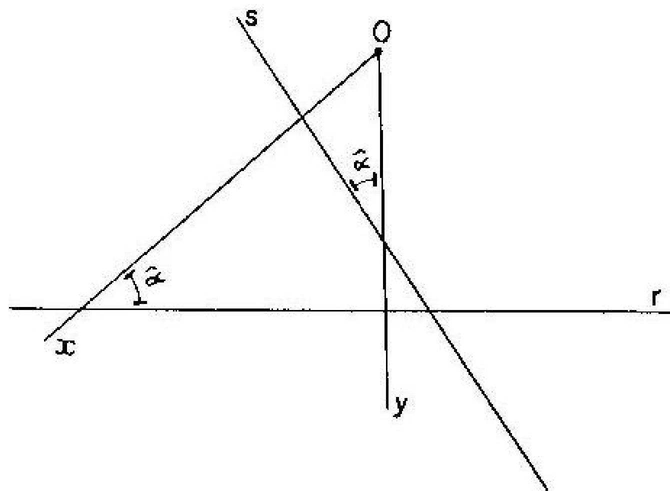


Seja J(AMBN) um feixe harmônico e uma secante s que determina os pontos A′, M′, B′ e N′.

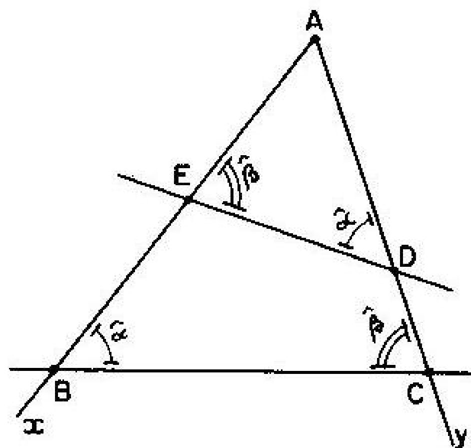
Ora, se r // JA′ determina xy = yz (pois J-AMBN é feixe harmônico), então J(A′M′B′N′) é um feixe harmônico, sendo M′ e N′ conjugados harmônicos de $\overline{A'B'}$.

3.10 — RETAS ANTIPARALELAS

3.10.1 — Seja um ângulo $x\widehat{O}y$. Se duas retas r e s são tais que o ângulo que r forma com Ox é o mesmo ângulo que s forma com Oy, as retas r e s são antiparalelas.



3.10.2 — Retas antiparalelas formam triângulos semelhantes.

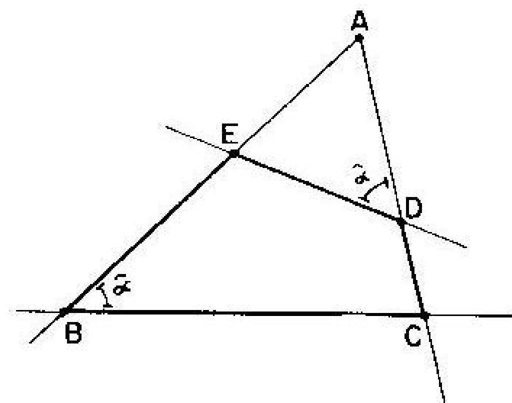


Porque os triângulos ABC e ADE possuem ângulos internos congruentes, temos

$$\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}} \quad \text{e} \quad \boxed{AD \cdot AC = AE \cdot AB}$$

I II

3.10.3 — Retas antiparalelas formam quadrilátero inscritível.



$\widehat{B} = \widehat{\alpha}$

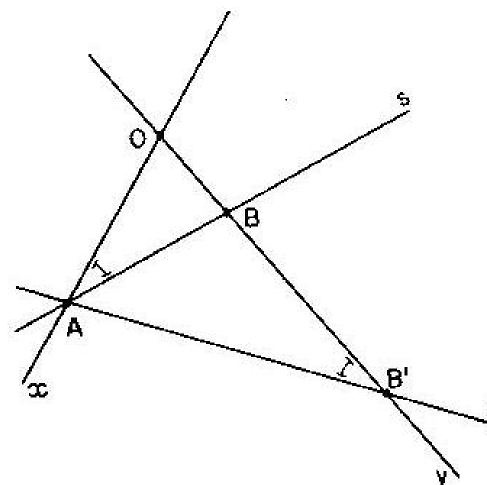
$\widehat{D} = 180° - \widehat{\alpha} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow B + \widehat{D} = 180°$

BCDE é inscritível.

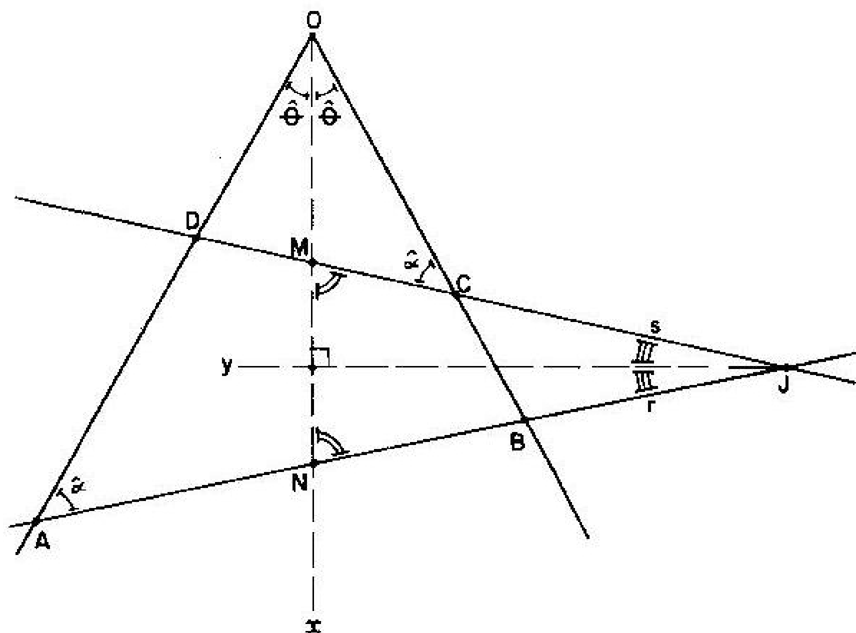
3.10.4 — **Caso Particular**

Se as retas r e s da figura são antiparalelas em relação a $\widehat{O}$, a relação 3.10.2 — II transforma-se em



$$\boxed{OA^2 = OB \cdot OB'}$$

3.10.5 — Se r e s são antiparalelas em relação a $\widehat{O}$, as bissetrizes de $\widehat{O}$ e de $(\widehat{r, s})$ são perpendiculares.



De fato, $\widehat{M} = \widehat{\alpha} + \widehat{\theta}$ (externo Δ OMC)

$\widehat{N} = \widehat{\alpha} + \widehat{\theta}$ (externo Δ ONA)

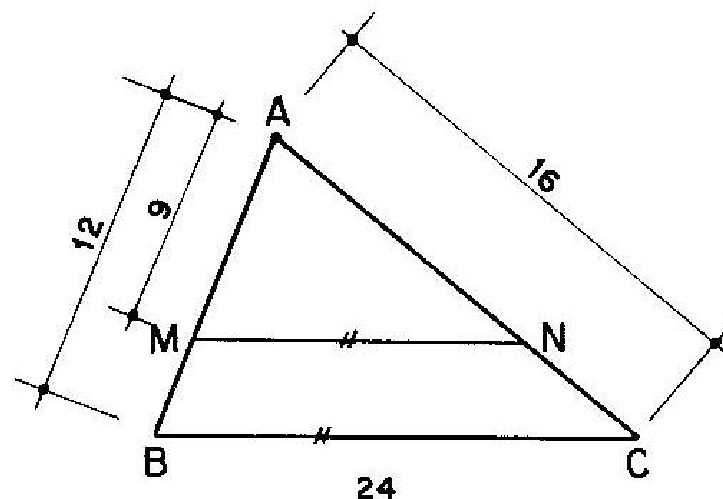
Como $\widehat{M} = \widehat{N}$, o triângulo JMN é isósceles, sendo a bissetriz de $\widehat{J}$ perpendicular à base $\overline{MN}$. Assim,

$$Ox \perp Jy$$ C. Q. D.

3.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

41. Os lados de um triângulo ABC são AB = 12, AC = 16 e BC = 24. Seja M do lado $\overline{AB}$ tal que MA = 3 MB. Traçando $\overline{MN}$ paralela a $\overline{BC}$, calcule o perímetro do triângulo AMN.

Solução



MA + MB = 12, MA = 3 MB

4 MB = 12, MB = 3, MA = 9.

Δ AMN $\sim$ Δ ABC.

Razão de semelhança $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{(2p)_{ABC}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{12 + 16 + 24} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{52} = \frac{3}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (2p)_{AMN} = 39$$

Resposta: 39.

42. Considere o triângulo ABC, de lados a, b e c, e seu baricentro G. Traçam-se $\overline{GE}$ e $\overline{GF}$ paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. Calcule os lados do triângulo GEF.

Solução

$\Delta\, GEF \sim \Delta\, ABC$

$$k = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$$

Então,

$$EF = \frac{a}{3},\ GF = \frac{b}{3} \text{ e } GE = \frac{c}{3}$$

Resposta: $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ e $\frac{c}{3}$.

43. Em um triângulo ABC, considere as alturas $\overline{BH_2}$ e $\overline{CH_3}$. Se AB = 8, AC = 12 e $AH_2 = 2$, calcule AH_3.

Solução

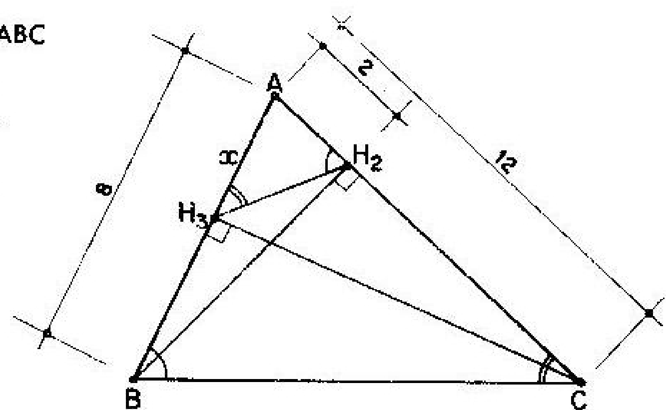
$\Delta AH_2H_3 \sim \Delta ABC$



$$\frac{AH_2}{AB} = \frac{AH_3}{AC}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{x}{12}$$

$x = 3$



Resposta: 3.

44. Calcule x na figura

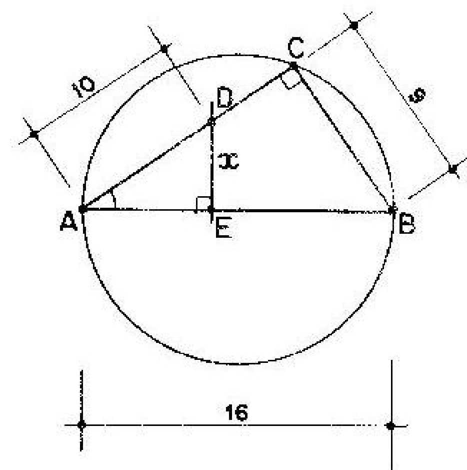
Solução

$\Delta\, AED \sim \Delta\, ACB$



$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{10}{16} = \frac{x}{9} \implies x = 5{,}625$$



Resposta: x = 5,625.

45. Na figura abaixo, ADEF é um losango, AB = 12 e AC = 6. Calcule o lado desse losango.

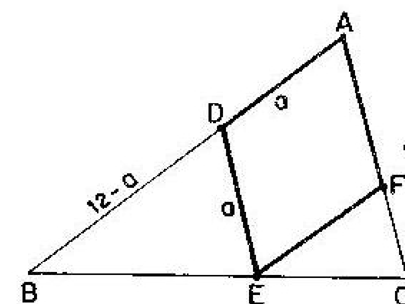
Solução

$\Delta\, BDE \sim \Delta\, BAC$

$$\frac{a}{6} = \frac{12 - a}{12}$$

$$12a = 6(12 - a) \implies$$

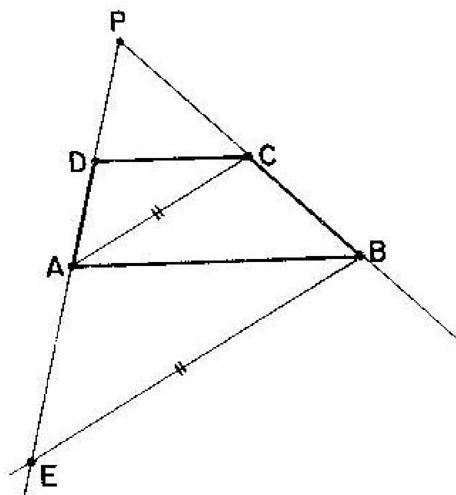
$$\implies a = 4$$



Resposta: 4.

46. Em um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, traça-se por B uma paralela à diagonal $\overline{AC}$ que encontra o prolongamento de $\overline{AD}$ em E. Sendo P o ponto de concurso dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, prove que PA é média geométrica entre PD e PE.

Solução

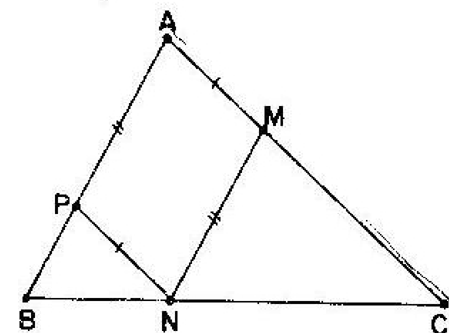


$$\left.\begin{array}{l}\Delta PDC \sim \Delta PAB \Longrightarrow \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{PC}{PB} \\[2ex] \Delta PAC \sim \Delta PEB \Longrightarrow \dfrac{PA}{PE} = \dfrac{PC}{PB}\end{array}\right\} \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{PA}{PE} \Longrightarrow PA^2 = PD \cdot PE.$$

47. Em um triângulo ABC, toma-se um ponto M qualquer de $\overline{AC}$. Traçam-se $\overline{MN}$ paralela a $\overline{AB}$ e $\overline{NP}$ paralela a $\overline{AC}$. Prove que

$$\frac{AP}{AB} + \frac{AM}{AC} = 1.$$

Solução



$\Delta\, CMN \sim \Delta\, CAB$

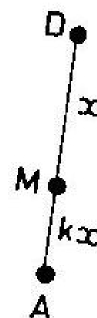
$$\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC} \Longrightarrow$$

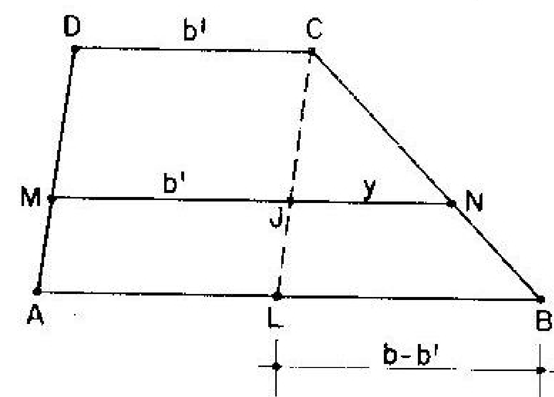
$$\Longrightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AC - AM}{AC}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AC} - \frac{AM}{AC} \Longrightarrow \frac{AP}{AB} + \frac{AM}{AC} = 1.$$

40. Em um trapézio de bases $AB = b$ e $CD = b'$, considere um ponto M do lado AD tal que $\dfrac{MA}{MD} = k$. Calcule o comprimento do segmento MN paralelo às bases do trapézio.

Solução





$$\frac{MA}{MD} = \frac{k}{1} \Longrightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{x}{x + kx} = \frac{1}{k+1} = \frac{CJ}{CL}$$

Seja $MN = b' + y$

$\Delta\ CJN \sim \Delta\ CLB$

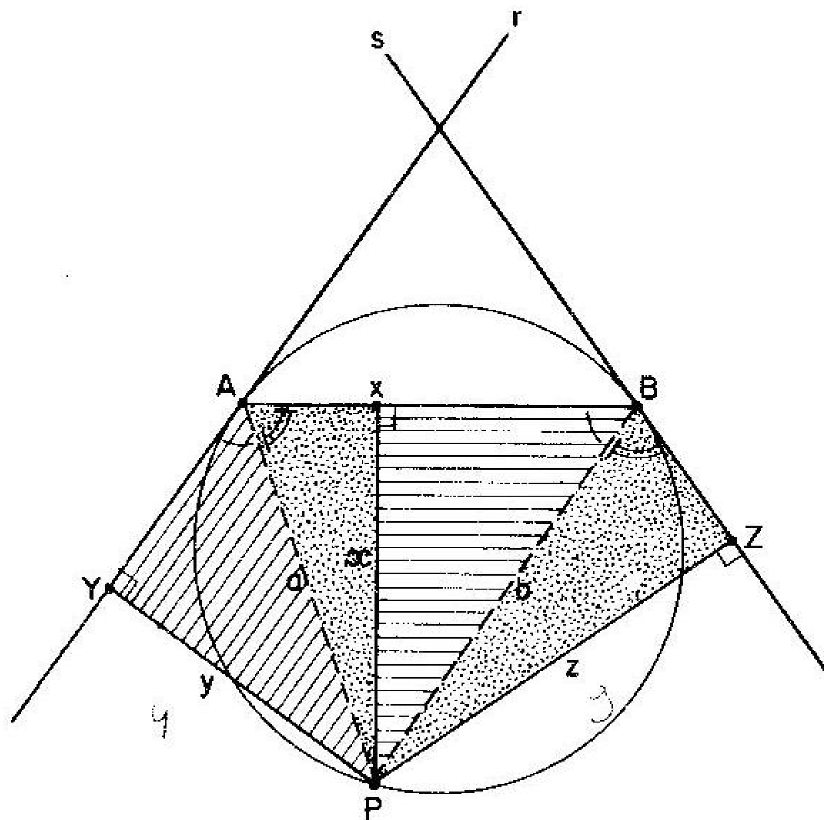
$$\frac{y}{b - b'} = \frac{CJ}{CL} = \frac{1}{k+1} \Longrightarrow y = \frac{b-b'}{k+1}.$$

$$MN = b' + \frac{b-b'}{k+1}$$

$$MN = \frac{b'k + b' + b - b'}{k+1} = \frac{b + b'k}{k+1}.$$

Resposta: $\dfrac{b + b'k}{k+1}$

49. Na figura, r e s são tangentes em A e B ao círculo. Por um ponto P do maior arco AB, traçam-se $\overline{Px}$, $\overline{Py}$ e $\overline{Pz}$ perpendiculares a $\overline{AB}$, r e s, respectivamente. Se $Py = 4$ e $Pz = 9$, calcule Px.



Solução

$$Y\hat{A}P = X\hat{B}P = \frac{\widehat{AP}}{2} \Longrightarrow \Delta\ YAP \sim \Delta\ XBP \Longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

$$X\hat{A}P = Z\hat{B}P = \frac{\widehat{BP}}{2} \Longrightarrow \Delta\ XAP \sim \Delta\ ZBP \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{z} \qquad (2)$$

Por (1) e (2),

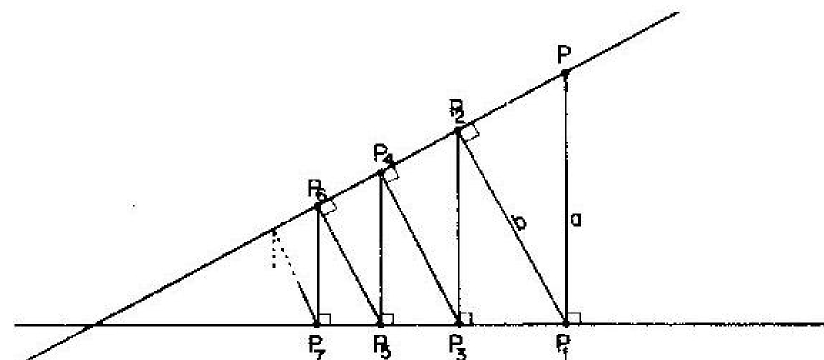
$$\frac{y}{x} = \frac{x}{z} \Longrightarrow x^2 = yz. \quad \text{Como } y = 4 \text{ e } z = 9,$$

$$x^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$x = 6$$

Resposta: 6

50. Na figura abaixo, $PP_1 = a$ e $P_1P_2 = b$. Calcule o limite da soma $PP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \ldots\ldots\ldots$



Solução

$$\Delta\ PP_1P_2 \sim \Delta\ P_1P_2P_3 \sim \Delta\ P_2P_3P_4 \sim \Delta\ P_3P_4P_5 \sim \ldots\ldots\ldots$$

Então,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{P_2P_3} = \frac{P_2P_3}{P_3P_4} = \ldots\ldots\ldots,$$

e $P_2P_3 = \frac{b^2}{a}$, $P_3P_4 = \frac{b^3}{a^2}$, ..., $P_nP_{n+1} = \frac{b^n}{a^{n-1}}$.

A soma dos segmentos será

$$a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \dots = a\underbrace{\left[1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \dots\right]}_{\text{P.G.}} =$$

$$= a \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^2}{a - b}$$

Resposta: $\frac{a^2}{a-b}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

51. Na figura abaixo, AD = 20, DB = 5, AC = 30 e BC = 45. Se $\overline{DE}$ é paralelo a BC, calcule o perímetro do trapézio BCDE.

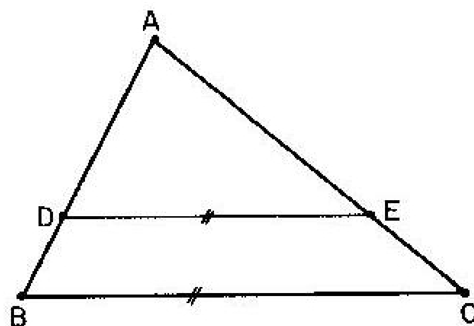
A) 80

B) 86

C) 90

D) 92

E) NRA.



52. Na figura abaixo, BC = 32, $\frac{BD}{BA} = \frac{1}{4}$, $\overline{DE}//\overline{BC}$, $\overline{DF}//\overline{AC}$ e $\overline{EG}//\overline{AB}$. Então, FG mede:

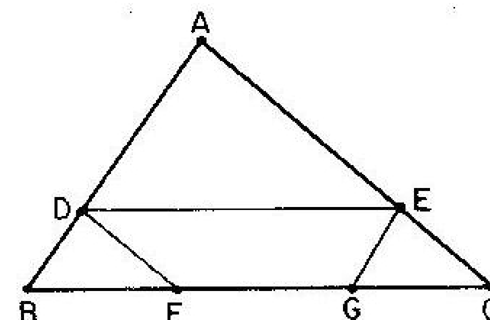
A) 8

B) 16

C) 24

D) 30

E) NRA.



53. Na figura abaixo, $AD = \frac{1}{4}AB$, $\overline{DE}//\overline{BC}$, $\overline{EF}//\overline{AB}$, $\overline{FG}//\overline{AC}$ e $\overline{GH}//\overline{BC}$. Então, $\frac{EH}{AC}$ vale:

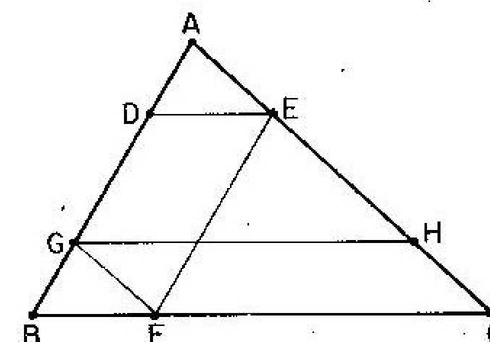
A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

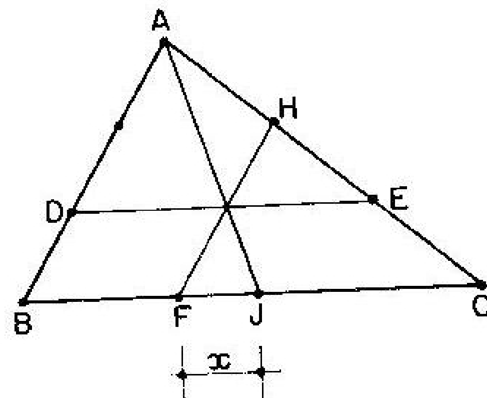
D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{3}{4}$



54. Na figura, cada lado do triângulo ABC está dividido em três segmentos congruentes. Considere a ceviana $\overline{AJ}$ que passa pelo ponto de concurso de DE e FH.

Se FJ = x, BC mede:



A) 3x

B) 4x

C) 6x

D) 9x

E) NRA.

55. Dado um triângulo de perímetro P, unindo-se os pontos médios de seus lados forma-se um triângulo, unindo-se os pontos médios desse segundo triângulo forma-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente. A soma dos perímetros de todos os triângulos

A) é infinita

B) é igual a P

C) é igual a 2P

D) é superior a 2P mas finita

E) NRA.

56. Um trapézio tem bases de comprimentos 8 e 4 e altura 9. A que distância da base maior cortam-se as diagonais?

A) 4,5

B) 5

C) 6

D) 6,5

E) NRA.

57. O comprimento do lado do quadrado inscrito em um triângulo de base 12 e altura 8 é:

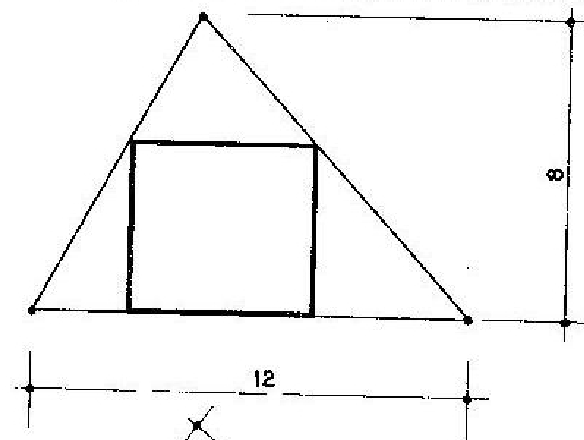
A) 4

B) 4,2

C) 4,5

D) 4,8

E) 5



58. Calcule na figura

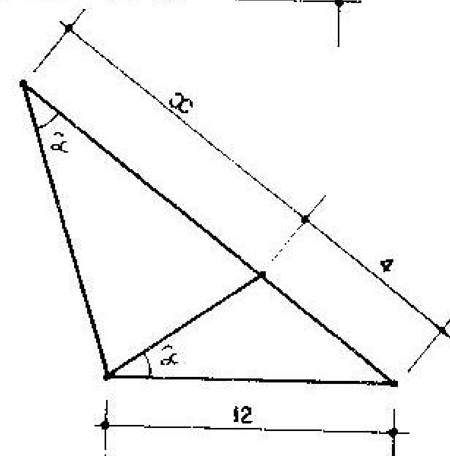
A) 20

B) 24

C) 28

D) 30

E) 32



59. Um retângulo cuja base é o dobro da altura está inscrito em um triângulo de base 12 e altura 9. O perímetro desse retângulo é:

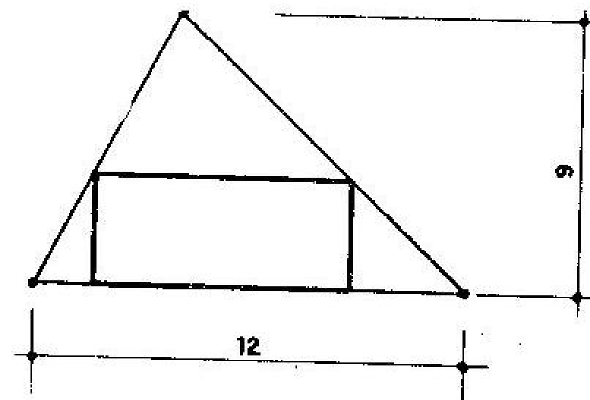
A) 3,6

B) 14,4

C) 18,8

D) 21,6

E) NRA



60. Por um ponto P da base $\overline{BC}$ de um triângulo ABC traçamos $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ paralelos a $\overline{AB}$ e AC, respectivamente. Se AB = 8, AC = 12, BC = 10 e BP = 2, o perímetro do paralelogramo AQPR é:

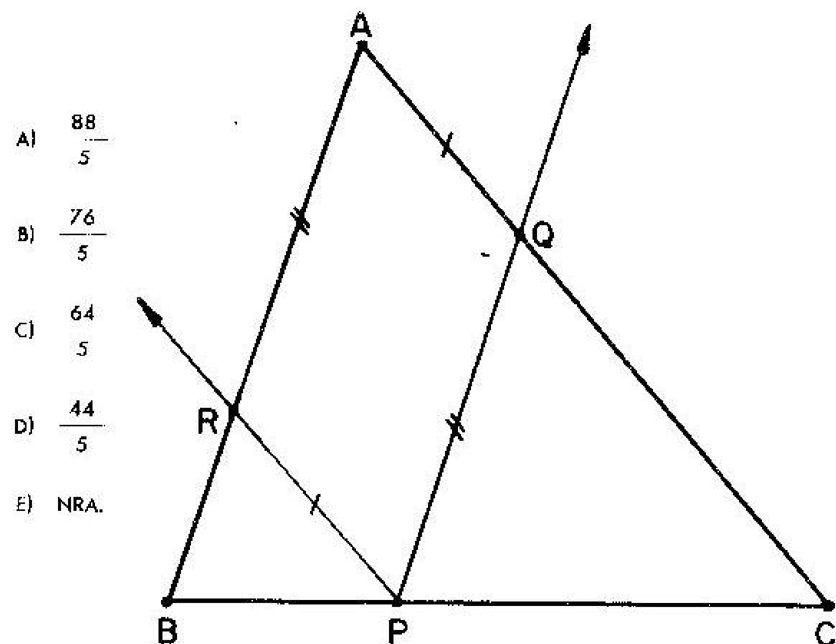
A) $\frac{88}{5}$

B) $\frac{76}{5}$

C) $\frac{64}{5}$

D) $\frac{44}{5}$

E) NRA.



61. Por um ponto P da base $\overline{BC}$ de um triângulo ABC traçamos $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ paralelos a AB e $\overline{AC}$, respectivamente. Se AR = 4, RB = 1 e QC = 6, então AQ mede:

A) 1

B) $\frac{6}{5}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{8}{5}$

E) NRA.

62. Num retângulo ABCD de lados AB = 15 e BC = 9 traçam-se a diagonal $\overline{BD}$ o segmento $\overline{CM}$ (M, médio de $\overline{AB}$) que se cortam em P. Por P traçam-se as perpendiculares $\overline{PR}$ e PS aos lados $\overline{AB}$ e BC. O perímetro do retângulo PRBS é:

A) 12

B) 15

C) 16

D) 18

E) 20

63. Na figura abaixo, ABCD é um trapézio, AB = 22, CD = 13, $\frac{MA}{MD} = \frac{1}{2}$ e MN é paralelo a AB. O comprimento do segmento MN é:

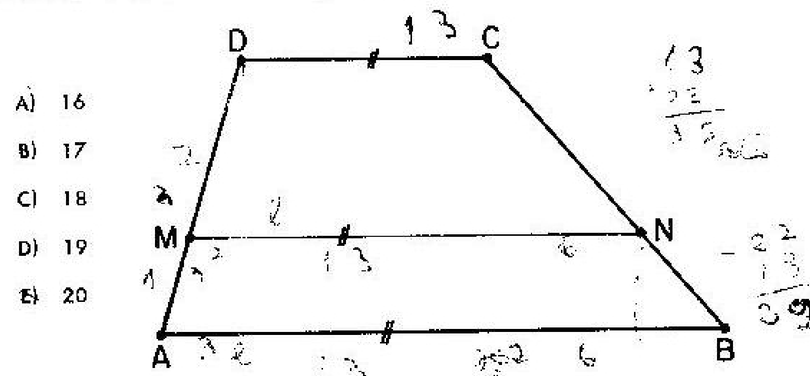
A) 16

B) 17

C) 18

D) 19

E) 20



64. Em um triângulo ABC retângulo em $\hat{A}$ inscreve-se um retângulo MNPQ ($\overline{MN}$ sobre $\overline{BC}$). Sendo BC = 20, BM = 4 e NC = 9, o perímetro do retângulo é:

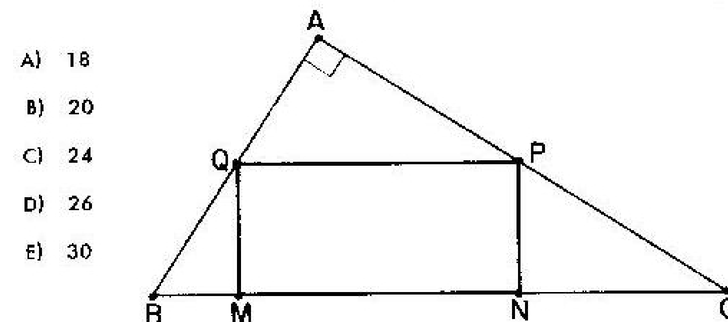
A) 18

B) 20

C) 24

D) 26

E) 30



65. Inscreve-se um quadrado em um triângulo retângulo ABC como mostra a figura Se os catetos do triângulo retângulo medem 12 e 24, o lado do quadrado mede

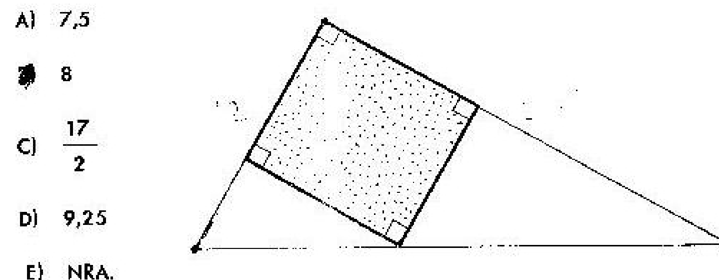
A) 7,5

B) 8

C) $\frac{17}{2}$

D) 9,25

E) NRA.



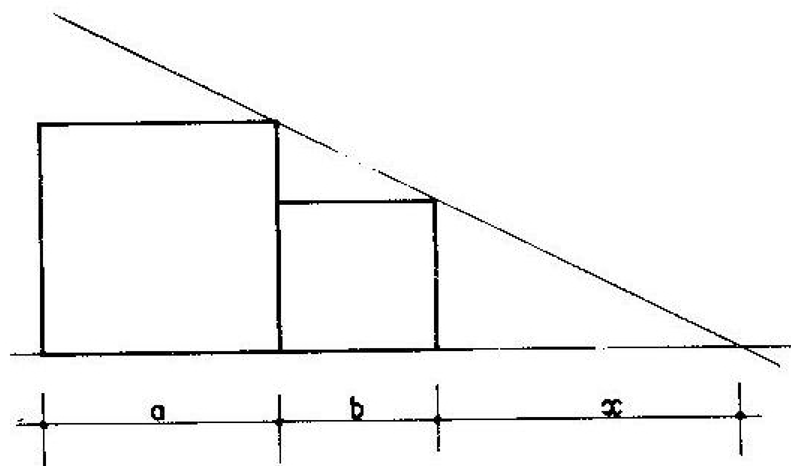
66. Um trapézio ABCD possui bases AB = a e CD = b. Pelo ponto de concurso das diagonais traça-se uma reta paralela às bases. Calcule o segmento desta paralela limitado pelos lados não paralelos:

A) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{ab}{2(a+b)}$

B) $\frac{2ab}{a+b}$ D) $\frac{a(a-b)}{(a+b)}$

E) NRA.

67. Considere os quadrados da figura de lados a e b ($a > b$). Então, x vale:



A) $\frac{b^2}{a-b}$

B) $\frac{a^2}{a-b}$

C) $\frac{ab}{a+b}$

D) $\frac{ab}{a-b}$

E) NRA.

68. Considere os quadrados da figura. Calcule x.

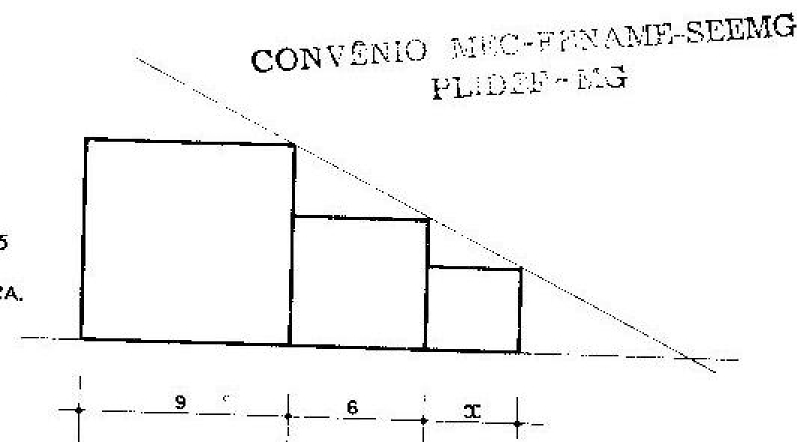
A) 2

B) 3

C) 4

D) 4,5

E) NRA.



69. O perímetro do triângulo ABC da figura é 80, sendo BC = 9 e DE paralela a BC, tangente ao círculo inscrito. Então, DE mede:

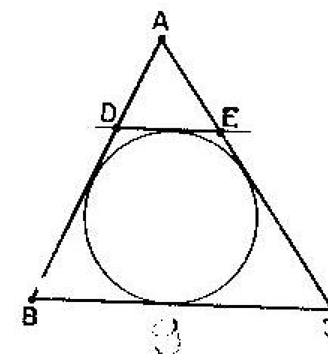
A) 3

B) $\frac{16}{5}$

C) $\frac{18}{5}$

D) 4

E) NRA.

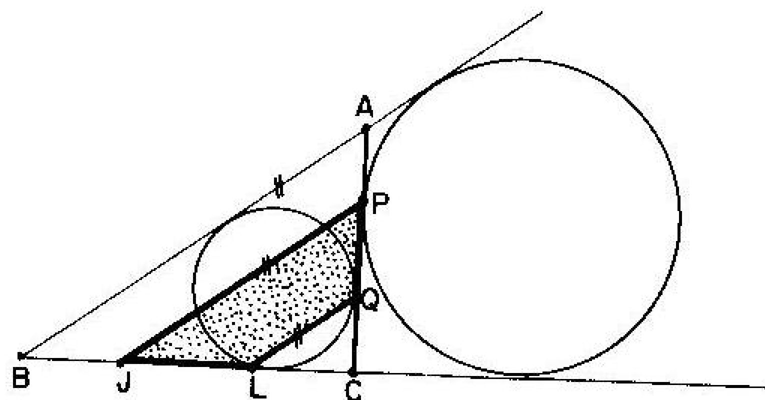


70. Na figura, P e Q são os pontos de tangência dos círculos ex-inscrito e inscrito com o lado AC do triângulo ABC e PJ e QL são paralelos a AB. Se AB = 12, AC = 8 e BC = 10, o perímetro do trapézio PQLJ vale:

A) 15 C) 16

B) $\frac{31}{2}$ D) $\frac{33}{2}$

E) NRA.



71. Os trapézios da figura são semelhantes. Então, x vale:

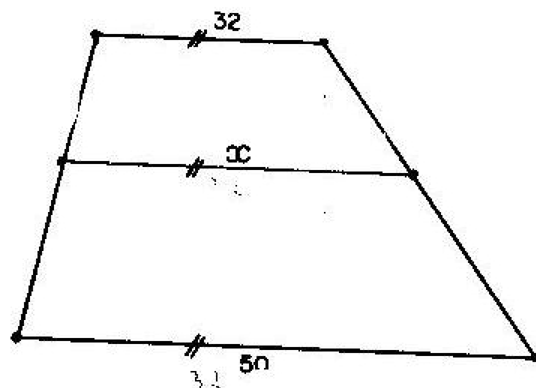
A) 40

B) 41

C) 42

D) 38

E) NRA.



ENUNCIADO REFERENTE AS QUESTÕES 72 e 73.

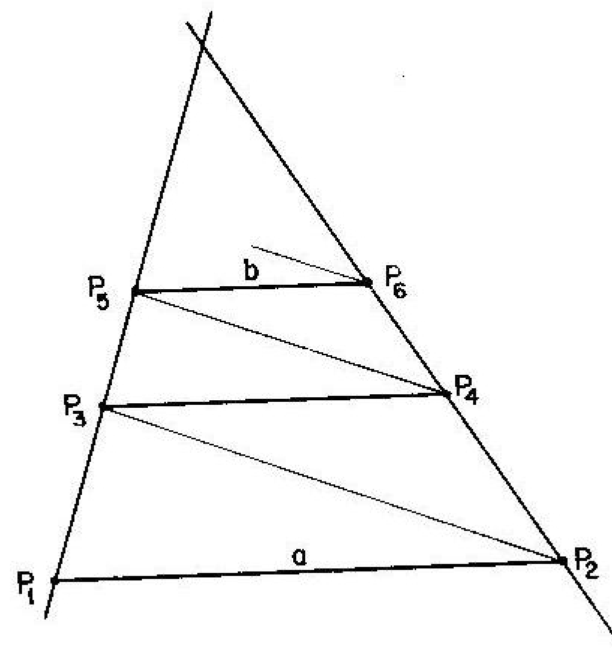
Na figura ao lado, temos

$\overline{P_1P_2} // \overline{P_3P_4} // \overline{P_5P_6} // \ldots \overline{P_{2n-1}P_{2n}} // \ldots$

$\overline{P_2P_3} // \overline{P_4P_5} // \ldots \overline{P_{2n}P_{2n+1}} // \ldots$

$P_1P_2 = a$

$P_5P_6 = b$



72. P_3P_4 é igual a:

A) $\dfrac{a+b}{2}$

B) $\dfrac{ab}{2}$

C) $\sqrt{ab}$

D) $2\sqrt{ab}$

E) NRA.

73. O limite da soma $P_1P_2 + P_3P_4 + P_5P_6 + \ldots$ é:

A) $a + \sqrt{ab}$

B) $b + \sqrt{ab}$

C) $\dfrac{a(b+\sqrt{ab})}{a-b}$

D) $\dfrac{b(a+\sqrt{ab})}{a-b}$

E) $\dfrac{a(a+\sqrt{ab})}{a-b}$

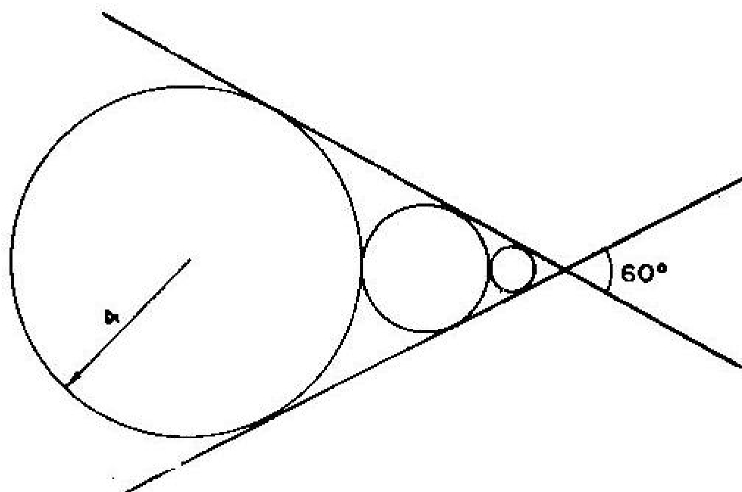
74. Num círculo de raio igual a 12 está inscrito um triângulo ABC cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 8 e 9, respectivamente. A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é igual a:

A) 3
B) 4
C) 6
D) 8
E) NRA.

75. No quadrilátero ABCD, $\hat{B} = \hat{D} = 90°$. Traçamos por C paralelas $\overline{CE}$ e $\overline{CF}$ aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. Se AF = 8, FB = 3, AE = 4 e ED = 6, a diagonal AC mede:

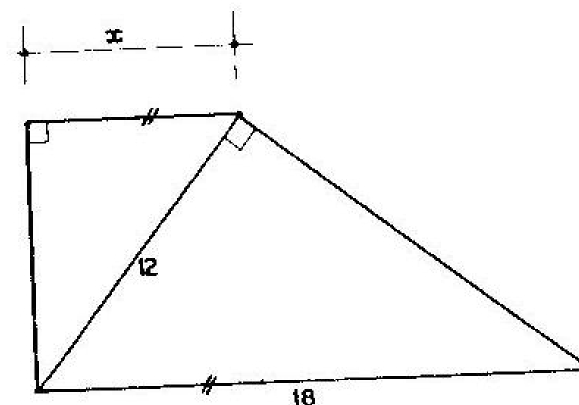
A) 8
B) $8\sqrt{2}$
C) $10\sqrt{2}$
D) $12\sqrt{2}$
E) NRA.

76. Considerando a figura abaixo, a soma dos diâmetros de todos os círculos é:



A) 15
B) 12
C) 8
D) 6
E) NRA.

77. Calcule x na figura



A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) NRA.

78. Se um trapézio retângulo tem diagonais perpendiculares e bases iguais, a sua altura é igual a:

A) 18
B) 19,5
C) 20
D) não se pode calcular
E) NRA.

79. Em um triângulo ABC, a bissetriz interna de $\hat{A}$ encontra $\overline{BC}$ em D e o círculo circunscrito em E. Se AB = 8, AC = 6 e DE = 3, calcule o comprimento da bissetriz AD.

A) 9
B) 10
C) 12
D) 13
E) NRA.

80. Os pontos E e D pertencem aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo ABC e são tais que $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$. Sendo F o ponto de concurso de $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$, então

$$\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD} \text{ é igual a:}$$

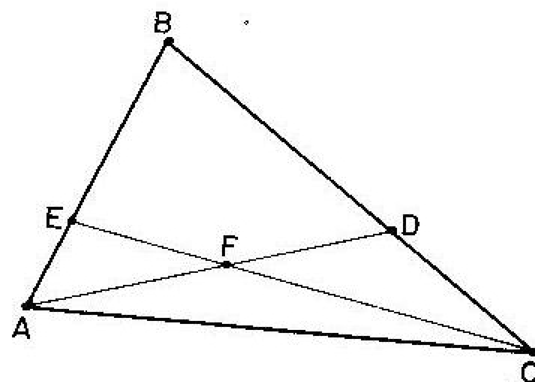
A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{5}{4}$

C) $\frac{3}{2}$

D) 2

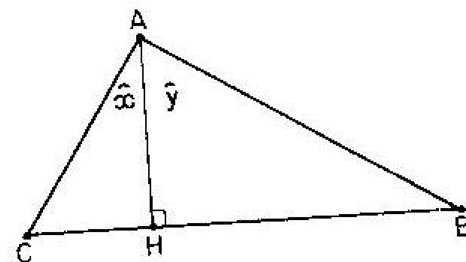
E) $\frac{5}{2}$



CAPÍTULO 4

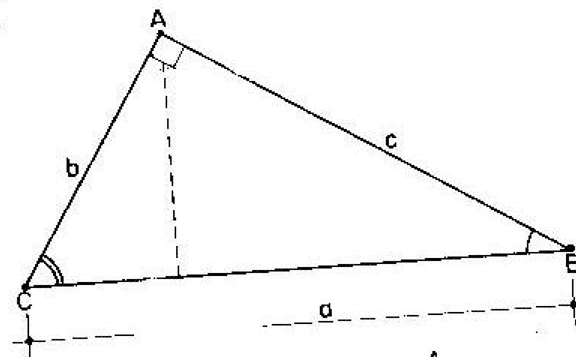
TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

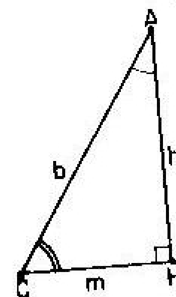
4.1 — RELAÇÕES MÉTRICAS



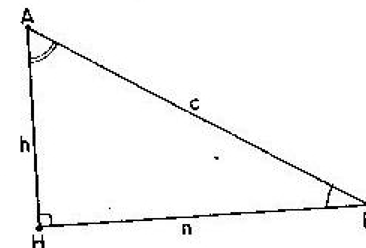
Seja ABC um triângulo retângulo em $\widehat{A}$ e seja $\overline{AH}$ a altura relativa à hipotenusa.

Fazendo $C\widehat{A}H = \widehat{x}$ e $B\widehat{A}H = \widehat{y}$, verificamos imediatamente que $\widehat{B} = \widehat{x}$ e $\widehat{C} = \widehat{y}$. Portanto, os triângulos retângulos HAC, HBA e ABC são semelhantes, como mostra a figura abaixo.





a → hipotenusa
b, c → catetos
h → altura
m, n → projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



Temos, então,

$$\Delta HAC \sim \Delta ABC \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{h}{c} = \frac{m}{b} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{bc = ah} \quad \text{I}$$

$$\boxed{b^2 = am} \quad \text{II}$$

$$\Delta HBA \sim \Delta ABC \Longrightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{n}{c} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{c^2 = an} \quad \text{III}$$

$$\Delta HAC \sim \Delta HBA \Longrightarrow \frac{b}{c} = \frac{h}{h} = \frac{m}{h} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{h^2 = mn} \quad \text{IV}$$

A partir destas, conseguimos ainda duas outras relações importantes.

a) Teorema de Pitágoras

Somando membro a membro II e III, temos

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n), \text{ mas } m + n = a \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{b^2 + c^2 = a^2} \quad \text{V}$$

b) De I, temos $bc = ah \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow b^2c^2 = a^2h^2$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2 \cdot c^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{c}{b^2c^2} + \frac{b^2}{b^2c^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad \text{VI}$$

concluímos, portanto, que em um triângulo retângulo,

a) cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela;

b) a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa;

c) o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos;

d) o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura;

e) o inverso do quadrado da altura é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos.

4.2 — TRIÂNGULOS RETÂNGULOS COM LADOS EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Sejam $x - R \cdot x \cdot x + R$, $R > 0$ lados de um triângulo

retângulo. Então, por 4 · 1 — V,

$$(x + R)^2 = (x - R)^2 + x^2$$

$$x^2 + 2xR + R^2 = x^2 - 2xR + R^2 + x^2$$

$$4xR = x^2 \quad \text{como} \quad x \neq 0,$$

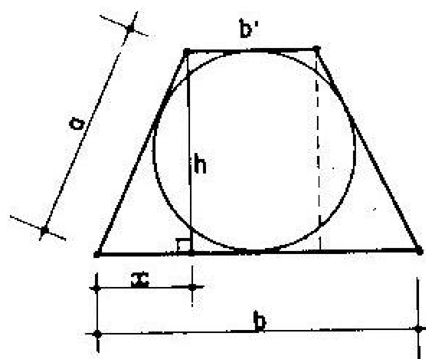
$$x = 4R.$$

Os lados do triângulo retângulo são, portanto,

$$\boxed{3R, \quad 4R \quad e \quad 5R.}$$

4.3 — TRAPÉZIO ISÓSCELES CIRCUNSCRITÍVEL

A altura de um trapézio isósceles circunscritível pode ser calculada em função das bases do trapézio.



Porque o trapézio é circunscritível,

$$2a = b + b',$$

ou $$a = \frac{b + b'}{2}$$

E também

$$2x = b - b'$$

ou $$x = \frac{b - b'}{2}$$

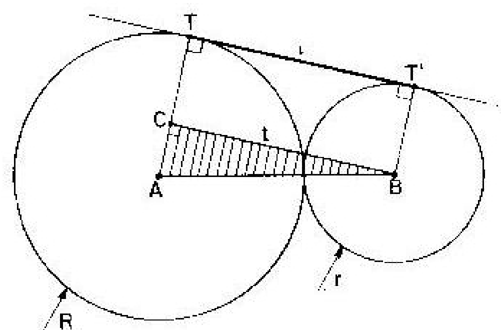
Temos, então,

$$\left(\frac{b + b'}{2}\right)^2 = \left(\frac{b - b'}{2}\right)^2 + h^2 \implies$$

$$\implies 4bb' = 4h^2 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{h = \sqrt{bb'}.}$$

4.4 — TANGENTE COMUM A CÍRCULOS TANGENTES



Se dois círculos são tangentes exteriormente, o segmento da tangente comum externa pode ser calculado em função dos raios.

Sejam A e B centros de dois círculos tangentes exteriormente de raios R e r e $\overline{BC}$ paralelo a $\overline{TT'}$, como mostra a figura.

Temos $$TT' = t$$

$$AB = R + r$$

$$AC = R - r$$

$$BC = t.$$

Do triângulo ABC, retângulo em C, vem

$$(R + r)^2 + (R - r)^2 + t^2$$

$$4Rr = t^2 \implies$$

$$\implies \boxed{t = 2\sqrt{Rr}.}$$

4.5 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

81. Calcule a altura do triângulo eqüilátero de lado a.

Solução

A relação de Pitágoras fornece

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \quad \text{ou}$$

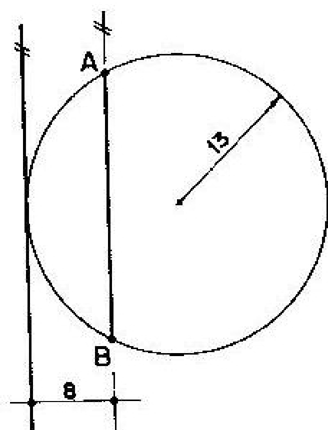
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \implies$$

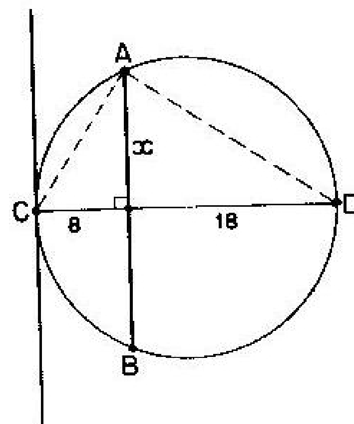
$$\implies h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Resposta: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

82. Em um círculo de raio 13, considere uma tangente t e uma corda $\overline{AB}$ paralela a t, distando 8 dessa tangente. Calcule o comprimento da corda.

Solução





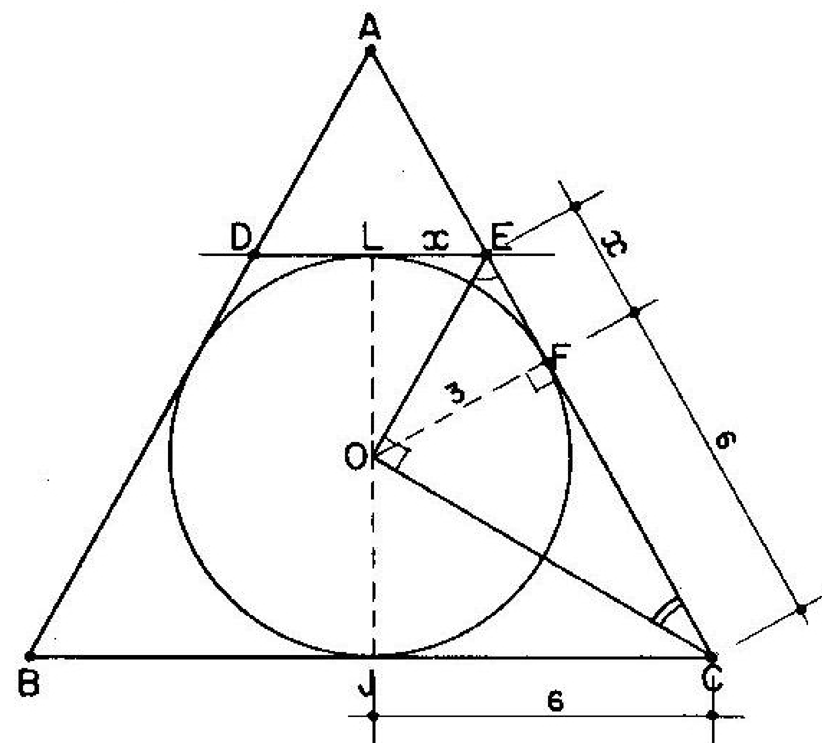
Consideremos o diâmetro $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$ e o triângulo ACD, retângulo em $\widehat{A}$. Seja $x = \dfrac{AB}{2}$.

Aplicando a relação IV, temos

$$x^2 = 8 \cdot 18$$
$$x^2 = 144$$
$$x = 12 \implies AB = 24.$$

Resposta: 24

83. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC = 12 circunscrito a um círculo de raio igual a 3. Uma parelela à base $\overline{BC}$ tangente ao círculo determina nos lados congruentes os pontos D e E. Calcule $\overline{DE}$.



1.ª Solução

Porque $\widehat{C} + \widehat{E} = 180°$, $\dfrac{\widehat{C}}{2} + \dfrac{\widehat{E}}{2} = 90°$, sendo a triângulo OCE

retângulo em O. Como $\overline{OF}$ é altura relativa à hipotenusa e como $CJ = CF = 6$ e $EF = EL = x$, a relação IV fornece

$$3^2 = 6 \cdot x \implies x = \frac{3}{2} \implies DE = 3.$$

2.ª Solução

Como BCED é um trapézio isósceles circunscritível, por 4.3 temos

$BC = b = 12$ $\qquad h = \sqrt{bb'}$

$DE = b'$

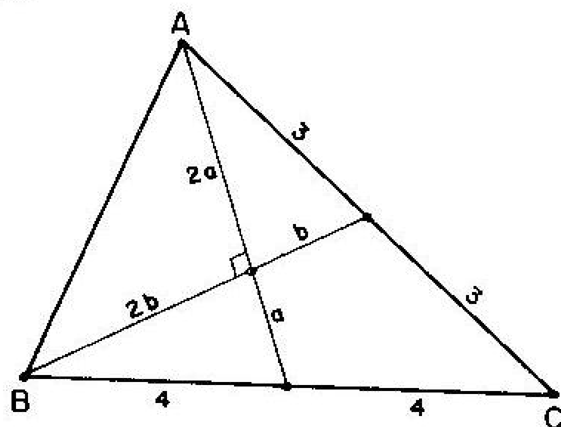
$JL = h = 6$ $\qquad 6^2 = 12 \cdot b' \implies$

$\implies b' = 3.$

Resposta: 3

84. Em um triângulo ABC, as medianas que partem de A e de B são perpendiculares. Se $BC = 8$ e $AC = 6$, calcule AB.

Solução



$4a^2 + b^2 = 9$

$4b^2 + a^2 = 16.$ Somando

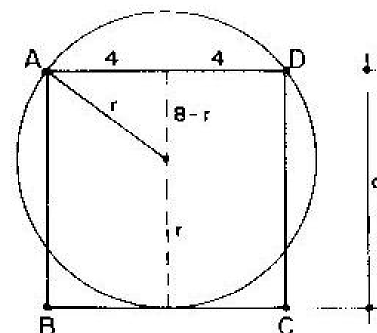
$5a^2 + 5b^2 + 25 \implies a^2 + b^2 = 5.$

Então, $\qquad 4a^2 + 4b^2 = 20 \implies$

$\implies AB^2 = 20 \implies AB = 2\sqrt{5}$

Resposta: $2\sqrt{5}$

85. É dado um quadrado ABCD de lado 8. Traça-se um círculo tangente ao lado BC passando por A e D. Calcule o raio desse círculo.



Solução

$r^2 = 4^2 + (8 - r)^2$

$r^2 = 16 + 64 + r^2 - 16r$

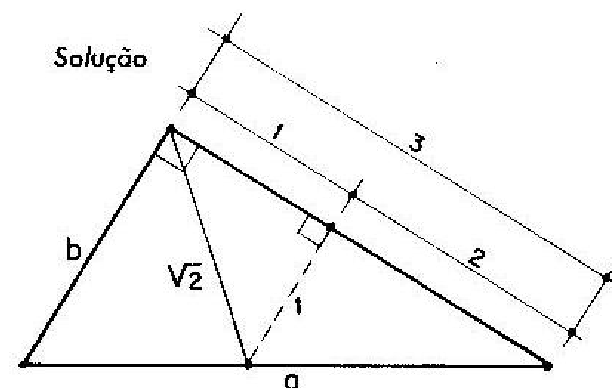
$16r = 50$

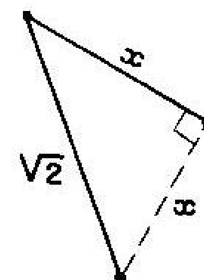
$r = 5$

Resposta: $r = 5$

86. Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que um dos catetos mede 3 e que a bissetriz do ângulo reto mede $\sqrt{2}$.

Solução





$x^2 + x^2 = 2 \implies$

$\implies x = 1.$

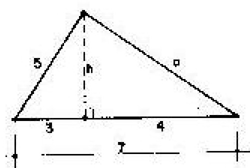
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{b} \Longrightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$a^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Resposta: $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

87. Calcule o lado *a* de um triângulo sabendo que os lados *b* e *c* medem respectivamente 5 e 7 e que a projeção de b sobre c mede 3.

Solução

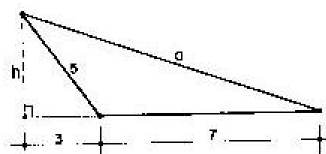


1.ª hipótese: $\widehat{A} < 90°$

$5^2 = 3^2 + h^2 \Longrightarrow h = 4$

$a^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a = 4\sqrt{2}$.



2.ª hipótese: $\widehat{A} > 90°$

$5^2 = 3^2 + h^2 \Longrightarrow h = 4$

$a^2 = 4^2 + 10^2 = 116 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a = 2\sqrt{29}$.

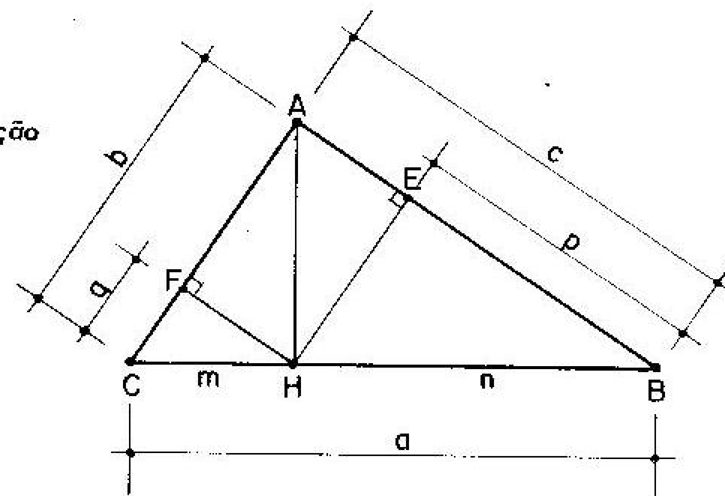
Resposta: $4\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{29}$.

88. Num triângulo ABC, retângulo em A, traçam-se a altura $\overline{AH}$ e os segmentos $\overline{HE}$ e $\overline{HF}$ perpendiculares a $\overline{AB}$ e AC, respectivamente.

Se BE = p e CF = q, prove que

$$\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Solução



$\triangle BEH \sim \triangle BAC \Longrightarrow \frac{n}{a} = \frac{p}{c}$

mas $c^2 = an$ ou $n = \frac{c^2}{a}$. Logo,

$$\frac{\frac{c^2}{a}}{a} = \frac{p}{c} \Longrightarrow c^3 = a^2p \Longrightarrow c^6 = a^4p^2 \qquad (1)$$

$\triangle CHF \sim \triangle CBA \Longrightarrow \frac{m}{a} = \frac{q}{b}$

mas $b^2 = am$ ou $m = \frac{b^2}{a}$. Logo,

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{a} = \frac{q}{b} \Longrightarrow b^3 = a^2q \Longrightarrow b^6 = a^4q^2 \qquad (2)$$

Como $b^2 + c^2 = a^2$, temos

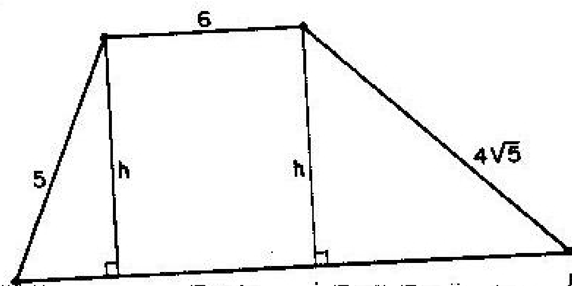
$$\sqrt[3]{a^4p^2} + \sqrt[3]{a^4q^2} = \sqrt[3]{a^6} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

C.Q.D.

89. As bases de um trapézio medem 17 e 6. Os lados não paralelos medem 5 e $4\sqrt{5}$. Calcule a altura desse trapézio.

Solução



$$25 = h^2 + x^2$$

$$80 = h^2 + y^2.$$

Subtraindo,

$$55 = (y^2 - x^2) = (y + x)(y - x)$$

$$55 = 11(y - x) \Longrightarrow y - x = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} y + x = 11 \\ y - x = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 3,\ y = 8$$

$$h^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow h = 4$$

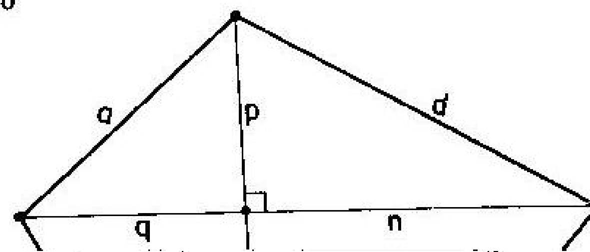
$$h^2 = (4\sqrt{5})^2 - 8^2 = 80 - 64 = 16 \Longrightarrow h = 4$$

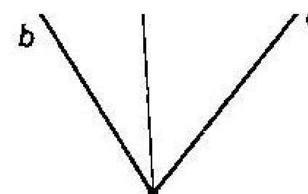
Resposta: 4.

90. Se a, b, c e d são lados de um quadrilátero de diagonais perpendiculares, prove que

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Solução





$$a^2 = p^2 + q^2$$

$$c^2 = m^2 + n^2$$

$$a^2 + c^2 = \underbrace{p^2 + q^2 + m^2 + n^2}_{d^2 = p^2 + n^2,\quad b^2 = q^2 + m^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{a^2 + c^2 = b^2 + d^2}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

91. Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. A razão desta progressão é:

A) $\sqrt{5}$
B) $1 + \sqrt{5}$
C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
D) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$
E) NRA.

92. Os catetos de um triângulo retângulo medem 15 e 20. A altura relativa à hipotenusa mede:

A) 8
B) 10
C) 12
D) 15
E) NRA.

93. Os catetos de um triângulo retângulo medem 3 e 6. A razão entre as projeções desses catetos sobre a hipotenusa é:

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{4}$
E) NRA.

94. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10 e a altura a ela relativa mede 3. O menor cateto desse triângulo mede:

A) $2\sqrt{5}$
B) $2\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{10}$
E) NRA.

95. Considere um triângulo eqüilátero ABC de lado 12, uma altura $\overline{AH}$ e o ponto M, médio dessa altura. O segmento $\overline{BM}$ mede:

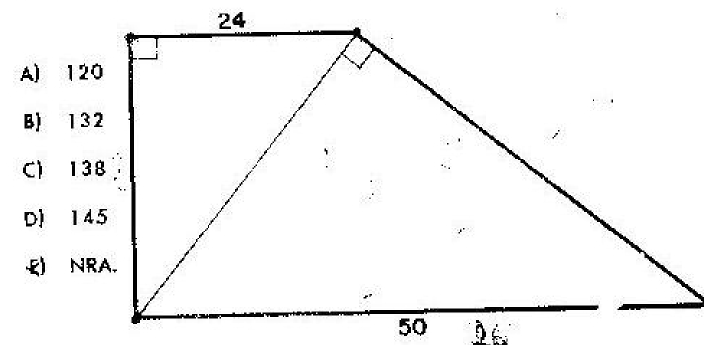
A) $\sqrt{18}$
B) $\sqrt{28}$
C) 6
D) $\sqrt{63}$
E) $\sqrt{98}$

96. Considere um ponto P no interior de um quadrado de lado a, de forma que tenha mesma distância a dois vértices consecutivos e ao lado oposto a esses vértices. Se d é a distância comum, então d vale:

A) $\frac{3a}{5}$
B) $\frac{5a}{8}$
C) $\frac{3a}{8}$
D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
E) $\frac{a}{2}$.

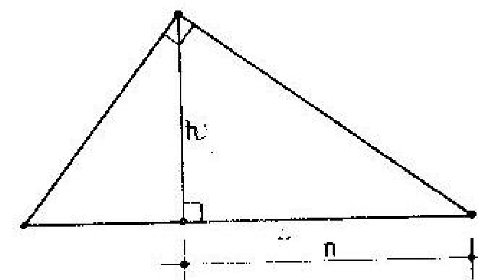
97. Calcule o perímetro do trapézio da figura

A) 120
B) 132
C) 138
D) 145
E) NRA.



98. Calcule a hipotenusa do triângulo retângulo sendo h = 9 e n = 12.

A) 16
B) 18
C) 18,5
D) 20
E) NRA.



99. Em um triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 18 e 32. O perímetro desse triângulo é igual a:

A) 120
B) 125
C) 132
D) 150
E) NRA.

100. Em um trapézio isósceles de bases 5 e 3, a altura é igual a 2. Os lados congruentes do trapézio medem:

A) $\frac{5}{2}$ C) $\sqrt{5}$

B) 3 D) $\sqrt{6}$

E) NRA.

101. As bases de um trapézio circunscrito a um círculo medem 9 e 6. Cada um dos outros dois lados do trapézio mede:

A) 4,5 C) 7,5

B) 6 D) 8

E) NRA. (EPUSP — 66)

102. Em um trapézio retângulo de bases 1 e 3, a altura é igual a $\sqrt{3}$. Então assinale a afirmativa falsa:

A) o lado oblíquo às bases mede $\sqrt{7}$

B) a menor diagonal mede 2

C) a maior diagonal mede $2\sqrt{3}$

D) uma das diagonais é perpendicular ao lado oblíquo às bases

E) uma das anteriores é falsa.

103. O raio do círculo inscrito em um triângulo equilátero de lado igual a $6\sqrt{3}$ mede:

A) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$

B) $2\sqrt{3}$ D) 3

E) NRA.

104. Um trapézio isósceles é circunscrito a um círculo. Se seu perímetro é 36 e uma base é o quíntuplo da outra, a altura desse trapézio mede:

A) 6 C) $3\sqrt{5}$

B) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ D) $2\sqrt{2}$

E) NRA.

105. Num triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a está inscrito um círculo. O raio desse círculo é:

A) $\frac{b+c-a}{2}$ C) $\sqrt{a^2-b^2}$

B) $\frac{2(a+b+c)}{3}$ D) $\frac{a+b+c}{2}$

E) NRA. (FEIUC — 67)

106. Dois círculos de raios 9 e 4 são tangentes exteriormente. O comprimento do segmento da tangente comum externa mede:

A) 6 C) 9

B) 8 D) 10

E) 12

107. A distância entre os centros de dois círculos é 37. Se os raios desses círculos medem 20 e 8, o segmento da tangente comum externa mede:

A) 30 C) 33

B) 32 D) 34

E) 35

108. A distância entre os centros de dois círculos é 53. Se os raios desses círculos medem 20 e 8, o segmento da tangente comum interna vale:

A) 45 C) 48

B) 46 D) 50

E) 52

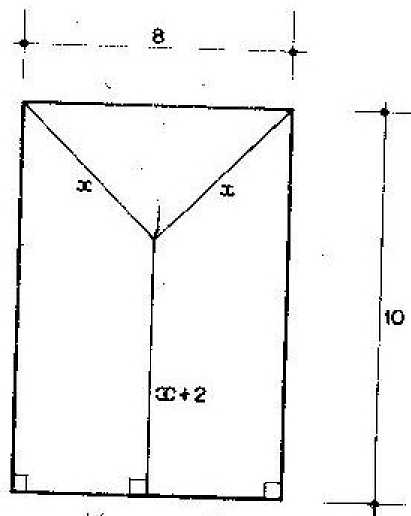
109. Considere um triângulo ABC de catetos $\overline{AB} = 5a$ e $\overline{AC} = 4a$. Pelo ponto M, médio de $\overline{AC}$, trace $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{AC}$. Se N é exterior ao triângulo e se $\overline{MN} = a$, BN mede:

A) $7a$ C) $5a\sqrt{2}$

B) $a\sqrt{40}$ D) $\frac{15a}{2}$

E) NRA.

110. Calcule x na figura



A) 4

B) 4,5

C) 5

D) 6

E) NRA.

111. O perímetro de um triângulo retângulo é 12 e a altura relativa à hipotenusa mede 2. A hipotenusa desse triângulo mede:

A) 5

B) $\frac{36}{7}$

C) 6

D) $\frac{41}{8}$

E) NRA.

112. O raio do círculo inscrito em um losango de diagonais 2 e 4 mede:

A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

E) NRA.

113. Um trapézio retângulo de bases a e b possui diagonais perpendiculares. A altura desse trapézio mede:

A) $\frac{ab}{a+b}$

B) $\frac{a+b}{2}$

C) $\sqrt{ab}$

D) não pode ser calculada

E) NRA.

114. Considere um quadrado Q de lado a e cinco círculos de mesmo raio r, interiores a Q, dos quais um é concêntrico com Q e tangente exteriormente aos quatro outros, e cada um destes tangencia dois lados consecutivos de Q. Então, r é igual a:

A) $\frac{a(2-\sqrt{2})}{3}$

B) $\frac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{8}$

C) $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$

D) $\frac{a}{5}$

E) nada disso. (CICE — 70)

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 115 E 116

As retas r e s são perpendiculares a t, como mostra a figura. Sabe-se que $AB = 2a$, $BC = 3a$ e que $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{BD}$.

115. AD mede:

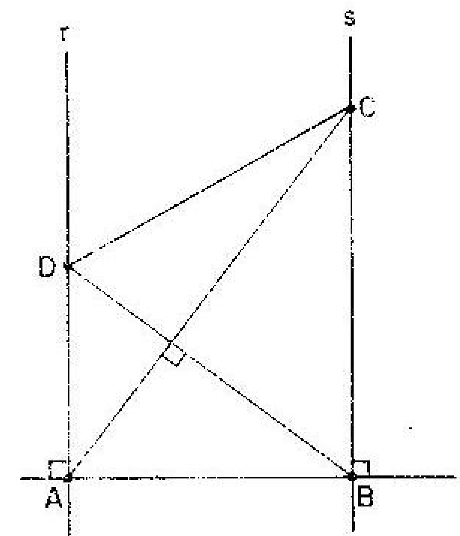
A) a

B) 2a

C) $\frac{3}{2}a$

D) $\frac{4}{3}a$

E) NRA.



116. DC mede:

A) $\frac{5}{2}a$

B) 3a

C) $2a\sqrt{7}$

D) $\frac{a}{3}\sqrt{61}$

E) NRA.

117. O raio do círculo inscrito em um setor circular de raio r e ângulo de 60° é:

A) $\frac{r}{2}$ C) $\frac{r}{4}$

B) $\frac{r}{3}$ D) $\frac{r}{5}$

E) NRA. (EPUSP — 67)

118. P é um ponto interior a um retângulo ABCD e tal que PA = 3 PB = 4 e PC = 5. Então, PD mede:

A) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$

E) 2.

119. É dado um triângulo ABC retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. ($b < c$). Pelo ponto M, médio da hipotenusa BC, traça-se $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{BC}$ (N $\subset$ $\overline{AC}$). O círculo circunscrito ao quadrilátero CAMN tem raio igual a:

A) $\frac{a^2}{2c}$ C) $\frac{a^2}{4c}$

B) $\frac{a^2}{ab}$ D) $\frac{a^2}{4b}$

E) NRA.

120. Sejam b e c catetos e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Podemos, então, afirmar que a equação

$$\frac{2}{b}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{c} = 0$$

A) tem sempre raízes reais

B) tem sempre raízes imaginárias

C) tem sempre raízes cuja soma dos quadrados é $4a^2$

D) só terá raízes reais se $h^2 > bc$

E) nada se pode afirmar.

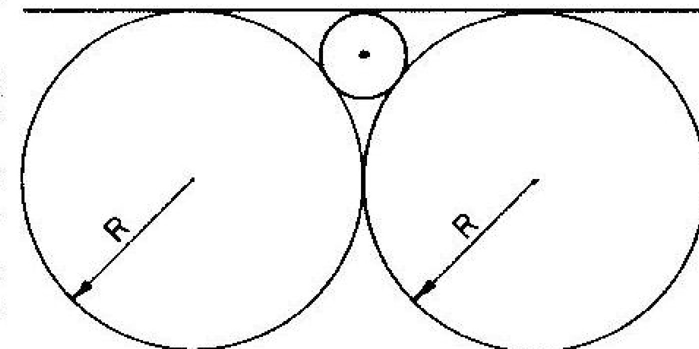
121. Considere um semicírculo de centro O, diâmetro $\overline{AB}$ e raio R. Construa interiormente a esse semicírculo dois outros de diâmetros AO e OB e um círculo tangente interiormente ao primeiro e exteriormente ao segundo e terceiro semicírculos. O raio deste círculo é:

A) $\frac{R}{2}$ C) $\frac{R}{4}$

B) $\frac{R}{3}$ D) $\frac{2R}{5}$

E) NRA.

122. São dados dois círculos tangentes exteriormente de mesmo raio R. Calcule o raio do círculo tangente aos dois primeiros e a tangente comum externa.



A) $\frac{R}{2}$

B) $\frac{R}{3}$

C) $\frac{R}{4}$

D) $\frac{R}{5}$

E) NRA.

123. As bases de um trapézio retângulo circunscritível a um círculo medem 15 e 10. Sua altura mede:

A) 10 C) $8\sqrt{2}$

B) 12 D) $5\sqrt{5}$

E) NRA.

124. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo cujos lados medem 5, 5 e 6.

A) 1 C) $\frac{3}{2}$

B) $\frac{3}{4}$ D) 2

E) NRA.

125. Seja ABCD um quadrado de lado a, como mostra a figura. Por A e C traçam-se $\overline{AJ}$ e $\overline{CL}$ paralelos. Se a distância entre essas paralelas é $\frac{a}{5}$, calcule DJ = BL = x.

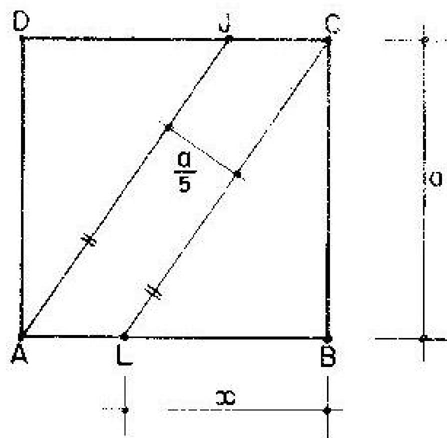
A) $\frac{3a}{4}$

B) $\frac{3a}{5}$

C) $\frac{4a}{5}$

D) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

E) NRA.



126. Calcule x na figura

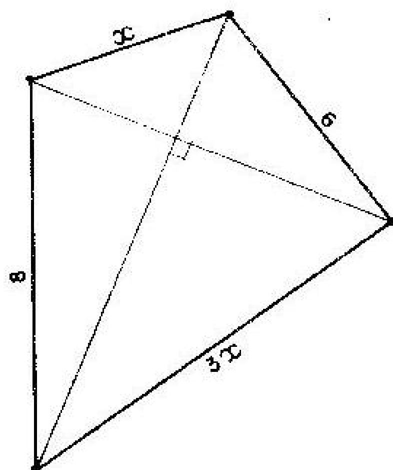
A) $\sqrt{5}$

B) $\sqrt{7}$

C) $3\sqrt{3}$

D) $\sqrt{10}$

E) NRA



127. Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que um cateto é igual a 6 e que a projeção do outro sobre a hipotenusa é igual a 5.

A) $6\sqrt{3}$ C) 8

B) $4\sqrt{2}$ D) $\frac{28}{3}$

E) 9.

128. Em um círculo de raio 6 está inscrito um triângulo ABC onde $\hat{A} = 45°$. Então,

A) AB = AC C) $BC = 6\sqrt{2}$

B) BC = 6 D) $BC = 3\sqrt{2}$

E) NRA.

129. Dois círculos de raios R e 4R são tangentes exteriormente e tangentes a uma reta nos pontos A e B. Então, AB vale:

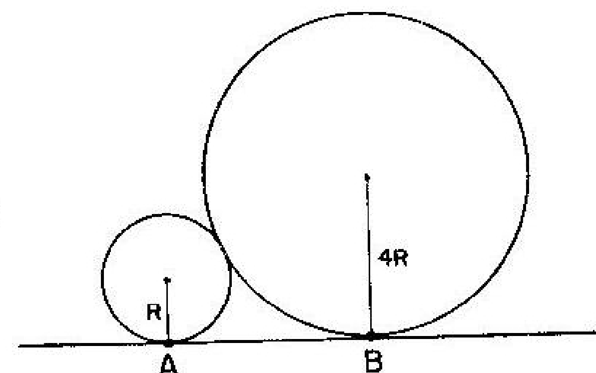
A) 2R

B) $\frac{7}{2}R$

C) $\frac{10}{3}R$

D) 4R

E) 5R.



130. Calcule x na figura sabendo que $\overline{AB}$ é um diâmetro e t é tangente em B no círculo.

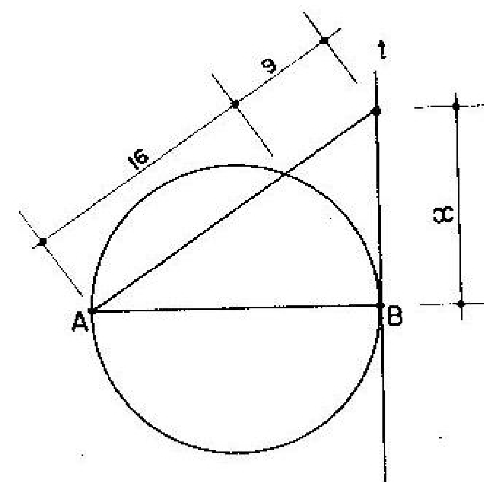
A) 10

B) 12

C) 15

D) 18

E) NRA.



131. Dois círculos de raios 8 e 10 são ortogonais. O comprimento da corda comum é:

A) $\sqrt{10}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$

B) $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ D) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$

E) NRA.

132. Pelo vértice A de um quadrado ABCD traça-se uma secante que encontra $\overline{CD}$ em E e o prolongamento de $\overline{BC}$ em F. Se AE = 3 e EF = 1, o lado do quadrado mede:

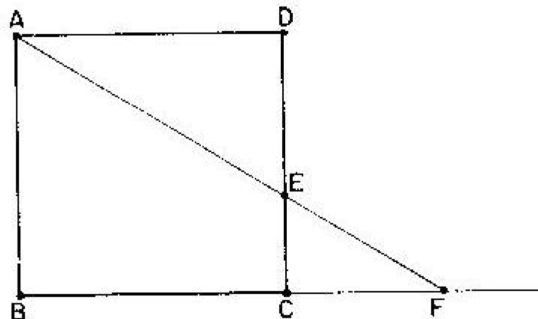
A) $\frac{9}{5}$

B) $\frac{10}{3}$

C) $\frac{9}{2}$

D) $\frac{15}{7}$

E) $\frac{12}{5}$



133. Calcule a altura de um trapézio isósceles de bases iguais a 10 e 6 sabendo que as diagonais são perpendiculares aos lados oblíquos às bases

A) 3 C) 5

B) 4 D) $\sqrt{5}$

E) NRA.

134. Uma corda de um círculo corta um de seus diâmetros segundo um ângulo de 45°. A corda fica então dividida em dois segmentos que medem 12 e 6. O raio desse círculo mede:

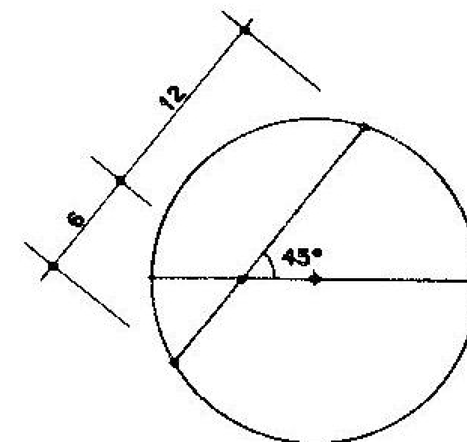
A) $2\sqrt{10}$

B) $3\sqrt{10}$

C) $6\sqrt{5}$

D) 10

E) NRA.



135. A base maior e um dos lados congruentes de um trapézio isósceles circunscritível medem respectivamente 16 e 10. A altura desse trapézio é igual a:

A) 4 C) 8 E) NRA.

B) 6 D) 9

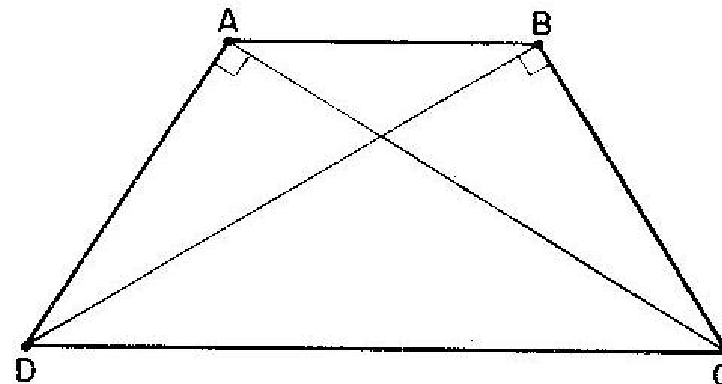
136. Considere a figura que consiste em um segmento $\overline{AB}$ de comprimento a e dois arcos circulares AC e BC de raio a e centros respectivamente em B e A. O raio do círculo inscrito nessa figura, tangente ao segmento AB e aos arcos AC e BC, é:

A) $(\sqrt{2}-1)\,a$ C) $\frac{3a}{8}$

B) $\frac{\sqrt{2}}{4}\,a$ D) $\frac{2a}{5}$

E) NRA. (CICE — 70)

137. ABCD é um trapézio, CD = 25 e AD = 15



Então,

A) $AC = BD = 24$

B) sua altura vale 10

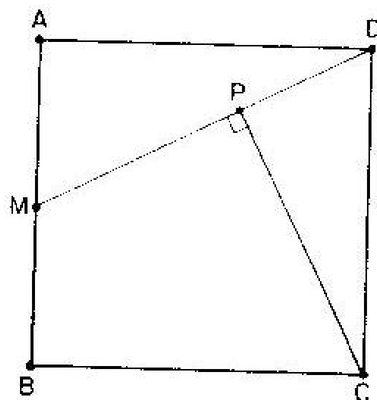
C) ABCD é circunscritível

D) $AB = 7$

E) NRA.

(TESTE VETOR — 72)

138. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado. Calcule seu lado sabendo que M é ponto médio de $\overline{AB}$, $\overline{CP}$ perpendicular a $\overline{MD}$ e $MP = 3$.



A) 5

B) $\sqrt{7}$

C) $2\sqrt{5}$

D) indeterminada

E) NRA.

(V.I. DEZ 71)

139. O raio do círculo circunscrito a um triângulo isósceles de base 6 e altura 9 é:

A) 4

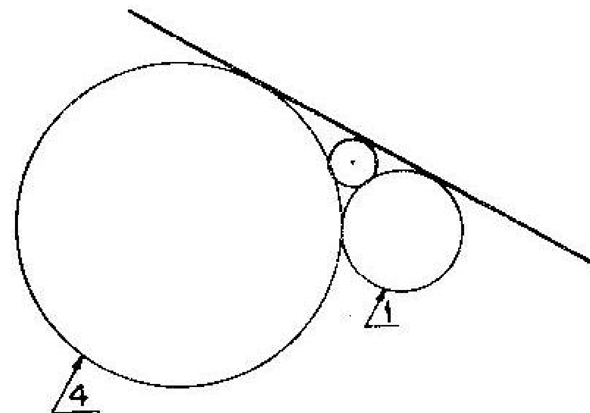
B) 5

C) 6

D) 6,5

E) NRA.

140. Dois círculos de raios 4 e 1 são tangentes exteriormente, como mostra a figura. Calcule o raio do círculo tangente a estes círculos e a tangente comum externa.



A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{4}{9}$

E) NRA.

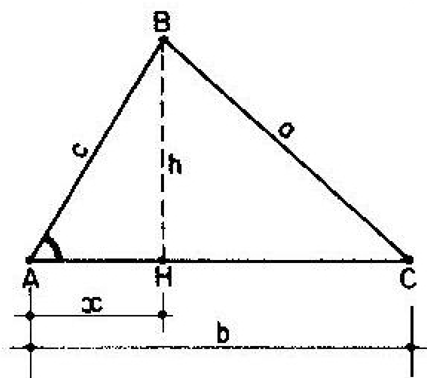
CAPÍTULO 5

TRIÂNGULOS QUAISQUER

5.1 — LEI DOS CO-SENOS

Em um triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o duplo produto destes dois lados pelo co-seno do ângulo formado.

Demonstração



Seja ABC um triângulo de lados BC = a, AC = b e AB = C. Consideremos ainda a altura BH = h e a projeção AH = x do lado $\overline{AB}$ sobre o lado $\overline{AC}$.

Temos, então,

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta BHC & \Longrightarrow & a^2 = h^2 + (b - x)^2 \\ \Delta BHA & \Longrightarrow & h^2 = c^2 - x^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a^2 = c^2 - x^2 + (b - x)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx \qquad (1)$$

$$\Delta BHC \Longrightarrow \cos \widehat{A} = \frac{x}{c} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = c \cdot \cos \widehat{A}.$$

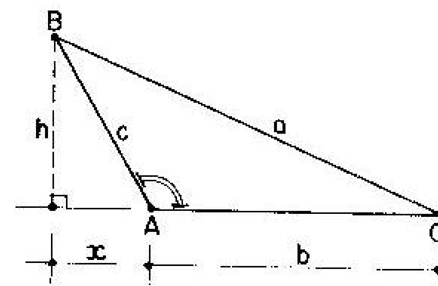
Substituindo 8 em (1), teremos

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos \widehat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot \cos \widehat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos \widehat{C} \end{array}}$$

Analogamente,

e

O leitor deve notar que não há alteração alguma se $\widehat{A} > 90°$, pois



$$\Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \quad (2)$$

mas $\frac{x}{c} = \cos(180° - \widehat{A}) = -\cos \widehat{A} \Longrightarrow x = -c \cos \widehat{A}$.

Assim, substituindo em (2), chegaríamos novamente a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}.$$

5.2 — SÍNTESE DE CLAIRAUT

Observando a lei dos co-senos, podemos escrever

$$\widehat{A} < 90° \Longleftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

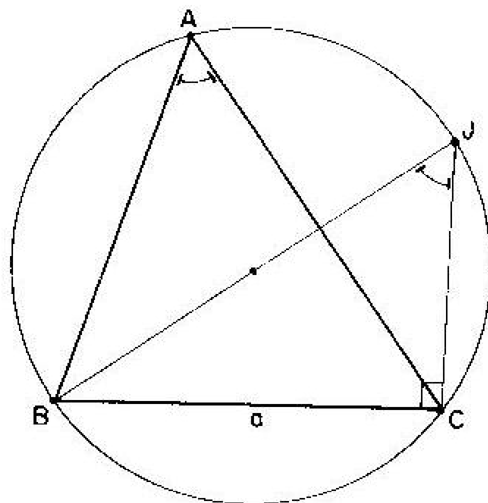
$$\widehat{A} = 90° \Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\widehat{A} > 90° \Longleftrightarrow a^2 > b^2 + c^2.$$

5.3 — LEI DOS SENOS (Lamy)

Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos **opostos** na mesma razão do diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

Demonstração

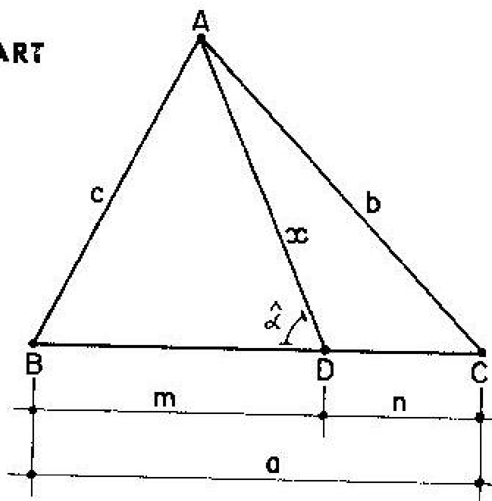


Seja ABC um triângulo de lados a, b e c inscrito em um círculo de raio R e seja $\overline{BJ}$ um diâmetro desse círculo. Como o triângulo BJC é retângulo em C e como $\hat{J} = \hat{A}$, vem

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{2R} \implies \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 2R.$$ Analogamente,

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R}$$

5.4 — RELAÇÃO DE STEWART



Seja ABC um triângulo de lados a, b e c e seja x o comprimento de uma ceviana $\overline{AD}$ que divide $\overline{BC}$ em dois segmentos m e n.

Da lei dos co-senos vem

$$\Delta ABD \qquad c^2 = x^2 + m^2 - 2xm \cos \alpha \qquad (1)$$

$$\Delta ADC \qquad b^2 = x^2 + n^2 - 2xm \cos (180° - \alpha) \qquad (2)$$

Multiplicando a primeira equação por n, a segunda por m e lembrando que $\cos (180° - \alpha) = - \cos \alpha$, temos

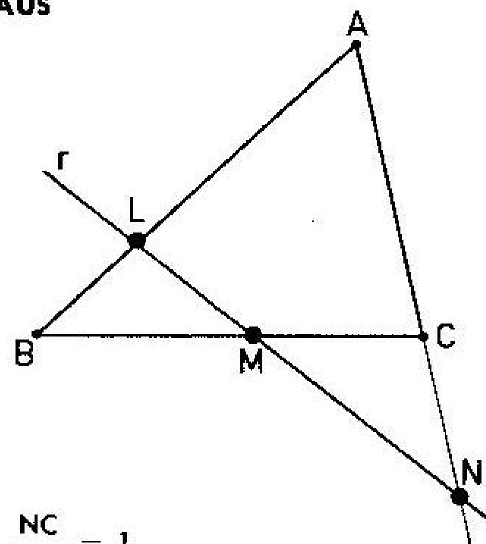
$$c^2n = x^2n + m^2n - 2xmn \cos \alpha$$

$$b^2m = x^2m + n^2m + 2xmn \cos \alpha.$$ Somando,

$$b^2m + c^2n = x^2(m + n) + mn(m + n),$$ mas $m + n = a$,

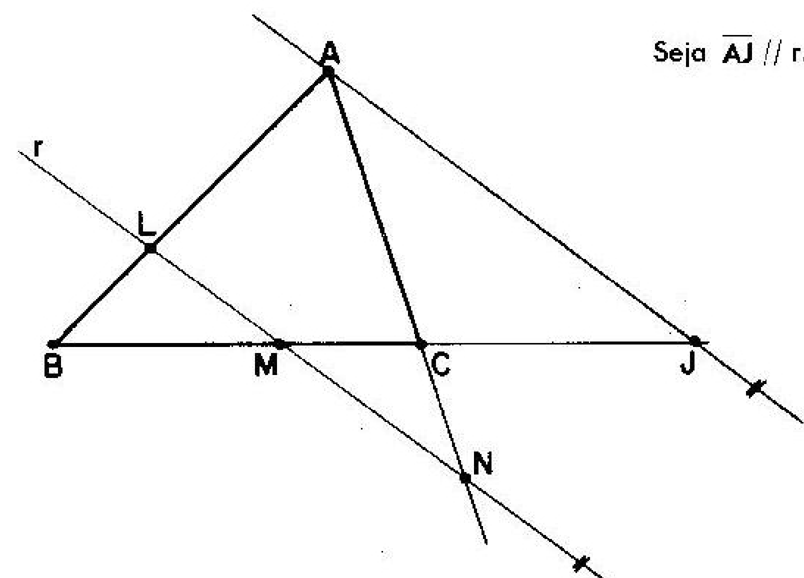
$$\boxed{b^2m + c^2n = x^2a + mna.}$$

5.5 — TEOREMA DE MENELAUS



Uma reta qualquer determina, sobre os lados de um triângulo ABC, os pontos L, M e N, como mostra a figura.

Mostraremos que $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$



Seja $\overline{AJ} \,//\, r$.

Considerando as paralelas e as secantes $\overline{BLA}$ e $\overline{BMJ}$, temos $\frac{LA}{MJ} = \frac{LB}{MB}$ ou $\frac{LA}{MJ} \cdot \frac{MB}{LB} = 1.$

E agora, das secantes $\overline{MJ}$ e $\overline{AN}$, tiramos $\frac{MJ}{NA} = \frac{MC}{NC}$ ou $\frac{MJ}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1.$

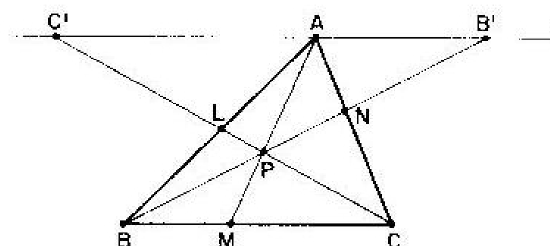
Multiplicando membro a membro, temos

$$\frac{LA}{MJ} \cdot \frac{MB}{LB} \cdot \frac{MJ}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.}$$

5.6 — TEOREMA DE CEVA

Consideremos em um triângulo ABC três cevianas, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CL}$. Se essas três cevianas forem concorrentes, então $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$, e reciprocamente.



Seja $r \,//\, \overline{BC}$.

Dos triângulos semelhantes formados, temos

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB'}{AC'}, \qquad \frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AB'}, \qquad \frac{LA}{LB} = \frac{AC'}{BC}.$$

Multiplicando membro a membro,

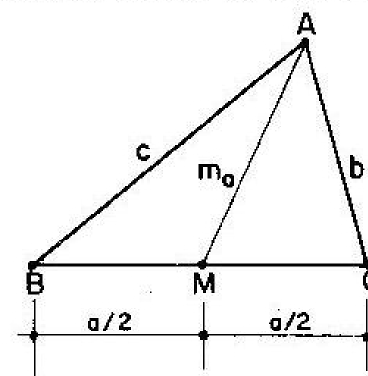
$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{AC'}{BC} \cdot \frac{AB'}{AC'} = \frac{BC}{AB'} \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1}$$

5.7 — CÁLCULO DAS PRINCIPAIS CEVIANAS

a) *Mediana*

Seja m_a a mediana relativa ao lado a de um triângulo ABC



A relação de Stewart fornece

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = m_a^2 \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a$$

$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2) = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Analogamente,

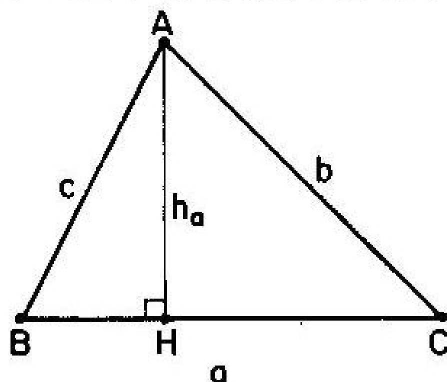
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

b) *Altura*

Seja h_a a altura relativa ao lado a de um triângulo ABC



Da lei dos co-senos,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a\underbrace{c\cos\hat{B}}_{BH}$$

$$BH = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$h_a^2 = c^2 - \left[\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right]^2$$

$$h_a^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - c^2 - a^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}{4a^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 2p \\ b + c - a = 2(p - a) \\ a + c - b = 2(p - b) \\ a + b - c = 2(p - c) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$h_a^2 = \frac{16\,p(p - a)(p - b)(p - c)}{4a^2}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Analogamente, se

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ então

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ e

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

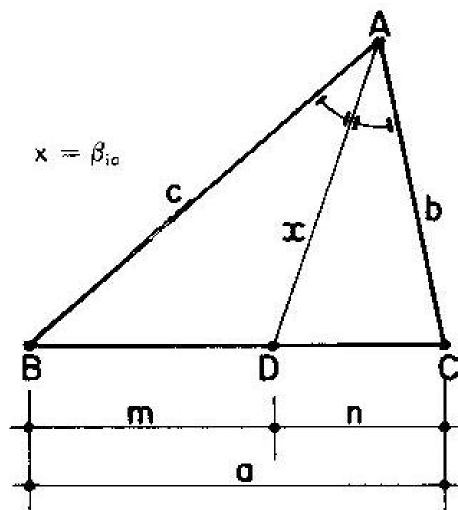
c) *Bissetriz interna*

Seja β_{ia} a bissetriz interna relativa ao lado a de um triângulo ABC.

De 2.7, temos

$$m = \frac{ac}{b+c}$$

$$n = \frac{ab}{b+c}$$



A relação de Stewart fornece

$$\frac{b^2ac}{b+c} + \frac{c^2ab}{b+c} = x^2a + \frac{a^2bc \cdot a}{(b+c)^2}$$

$$\frac{bc(b+c)}{b+c} = x^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} = x^2$$

$$x^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc \cdot 2p \cdot 2(p-a)}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{4}{(b+c)^2}\, bcp(p-a)$$

$$x = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Analogamente, se

$$\beta_{ia} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)},$$ então

$$\beta_{ib} = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp\,(p-b)}$$ e

$$\beta_{ic} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp\,(p-c)}$$

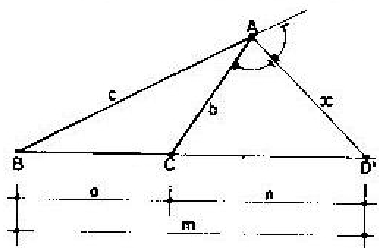
d) *Bissetriz externa*

Seja β_{ea} o comprimento da bissetriz externa relativa ao lado a de um triângulo ABC.

Ainda de 2-7, temos

$$m = \frac{ac}{|c - b|}$$

$$n = \frac{ab}{|c - b|}$$



$x = \beta_{ea}$

No triângulo ABD', a relação de Stewart fornece

$$x^2a + c^2 \frac{ab}{|c - b|} = b^2 \frac{ac}{|c - b|} + \frac{a \cdot ab \cdot ac}{(c - b)^2}$$

$$x^2 = \frac{-bc(b - c)^2 + bca^2}{(b - c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc[(a + b - c) \cdot (a + c - b)]}{(b - c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc \cdot 2(p - b)\,2(p - c)}{(b - c)^2}$$

$$x^2 = \frac{4}{(b - c)^2} bc(p - b)(p - c)$$

$$x = \frac{2}{|b - c|}\sqrt{bc(p - b)(p - c)}$$

Analogamente, se

$$\beta_{ea} = \frac{2}{|b - c|}\sqrt{bc(p - b)(p - c)},$$ então

$$\beta_{eb} = \frac{2}{|a - c|}\sqrt{ac(p - a)(p - c)}$$ e

$$\beta_{ec} = \frac{2}{|a - b|}\sqrt{ab(p - a)(p - b)}$$

5.8 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

141. Calcule o terceiro lado de um triângulo sabendo que os dois primeiros medem 5 e 8 e que formam 60°.

Solução

Temos $b = 5$, $c = 8$ e $\cos 60° = \frac{1}{2}$

Pela Lei dos Co-senos,

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \implies a = 7$$

Resposta: 7

142. Determine a natureza do triângulo cujos lados medem 12, 23 e 19.

Solução

Basta comparar

$$a^2 = 23^2 = 529$$

$$b^2 + c^2 = 12^2 + 19^2 = 144 + 361 = 505$$

Como 529 > 505, ou seja, como

$a^2 > b^2 + c^2$, o triângulo é OBTUSÂNGULO.

143. Em um triângulo ABC, AB = 10, AC = 14 e BC = 16. Calcule $\cos \hat{B}$.

Solução

Temos: $a = 16$

$b = 14$

$c = 10$

Pela Lei dos Co-senos,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot \cos\widehat{B} \implies$$

$$\implies \cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \implies$$

$$\implies \cos\widehat{B} = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} \implies$$

$$\implies \cos\widehat{B} = \frac{256 + 100 - 196}{320} = \frac{160}{320} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $\cos\widehat{B} = \frac{1}{2}$

144. Calcule x no triângulo abaixo.

Solução

Pela Lei dos Co-senos, temos

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2 - 2 \cdot x\,(x + 1)\left(-\frac{1}{2}\right) \implies$$

pois $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

$$\implies x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + x \implies$$

$$\implies 2x^2 - x - 3 = 0 \implies \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (não serve)} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Resposta: $\frac{3}{2}$.

145. Um triângulo ABC está inscrito em um círculo de raio igual a 13. Se $a = 10$, calcule $\cos\widehat{A}$.

Solução

Pela Lei dos Senos, temos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 2R \implies \frac{10}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 26 \implies \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\widehat{A} = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\widehat{A}} = \pm\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$$

Resposta: $\pm\frac{12}{13}$.

146. O produto dos senos dos ângulos de um triângulo é $k\frac{abc}{R^3}$, onde a, b e c são os lados e R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo. Calcule k.

Solução

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R \implies$$

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a}{2R}, \quad \operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{2R}, \quad \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{c}{2R}.$$

Então,

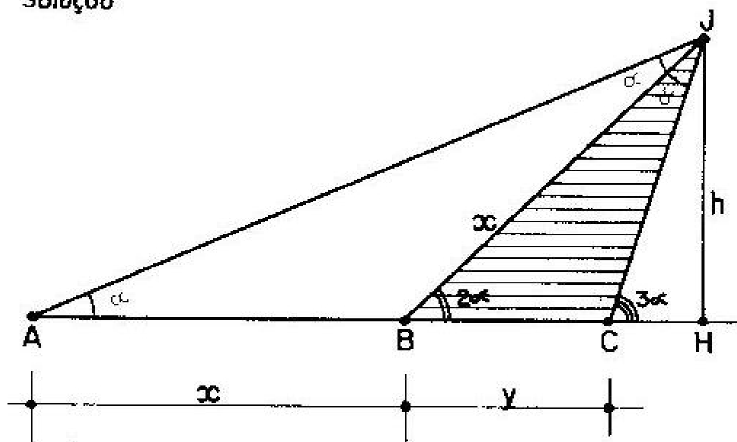
$$\operatorname{sen}\widehat{A} \cdot \operatorname{sen}\widehat{B} \cdot \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{abc}{8R^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{abc}{R^3}.$$

Logo, $k = \frac{1}{8}$.

Resposta: $\frac{1}{8}$.

147. Um observador vê uma torre segundo um ângulo α. Aproxima-se x metros e passa a vê-la sob ângulo 2α. Aproxima-se mais y metros e passa a vê-la sob ângulo 3α. Calcule em metros a altura da torre desprezando a altura do observador.

Solução



Verificamos inicialmente que $A\hat{J}B = B\hat{J}C = \alpha$ e que $BJ = x$. No triângulo JBC a Lei dos Senos fornece

$$\frac{x}{\text{sen}\,(180 - 3\alpha)} = \frac{y}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$\frac{x}{\text{sen}\,3\alpha} = \frac{y}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{x - y}{\text{sen}\,3\alpha - \text{sen}\,\alpha} = \frac{x - y}{2\cos 2\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha}\ ^*$$

$$\frac{y}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{x - y}{2\cos 2\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha} \implies$$

$$\implies \cos 2\alpha = \frac{x - y}{y} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,2\alpha = \sqrt{1 - \frac{(x - y)^2}{4y^2}}$$

---

* $\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\cos\frac{p + q}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{p - q}{2}$.

Do triângulo JBH,

$$h = JB \cdot \text{sen}\,2\alpha \implies h = x \cdot \sqrt{1 - \frac{(x - y)^2}{4y^2}}$$

Resposta: $h = x\sqrt{1 - \dfrac{(x - y)^2}{4y^2}}$

148. Em um triângulo cujos lados medem: $a = 8$, $b = 7$ e $c = 5$ calcule: a) h_a, b) m_c c) β_{ab}.

Solução

$$\left.\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 7 \\ c = 5 \end{array}\right\} \implies p = 10.$$

a) $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

$$h_a = \frac{2}{8}\sqrt{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot \sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

b) $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$

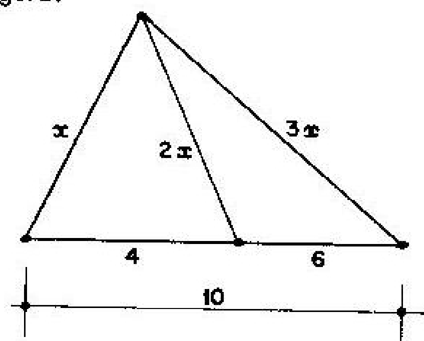
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(64 + 49) - 25} = \frac{1}{2}\sqrt{201}.$$

c) $\beta_{ab} = \dfrac{2}{|a - c|}\sqrt{ac\,(p - a)(p - c)}$

$$\beta_{ab} = \frac{2}{3}\sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot 20 = \frac{40}{3}$$

Respostas: a) $\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$, b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{201}$, c) $\dfrac{40}{3}$

149. Calcule x na figura.



Solução

A relação de Stewart fornece

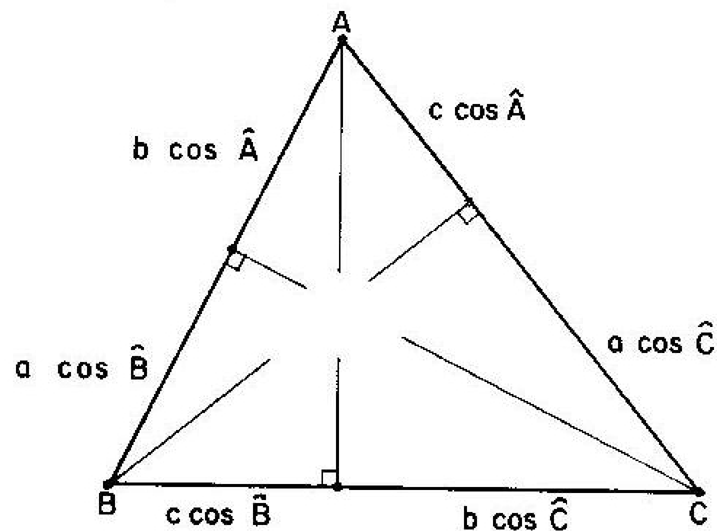
$$x^2 \cdot 6 + 9x^2 \cdot 4 = 4x^2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 \cdot 10$$

$$2x^2 = 240$$

$$x^2 = 120, \qquad x = 2\sqrt{30}$$

Resposta: $2\sqrt{30}$.

150. Demonstre que as três alturas de um triângulo são concorrentes.

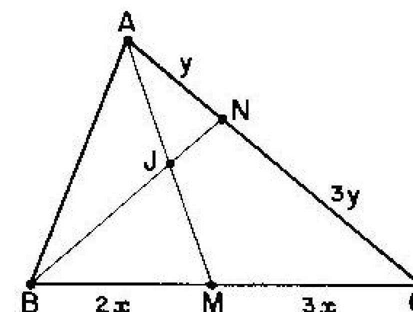


Pelo teorema de Ceva,

$$\frac{b \cos \hat{A} \cdot c \cos \hat{B} \cdot a \cos \hat{C}}{a \cos \hat{B} \cdot b \cos \hat{C} \cdot c \cos \hat{A}} = 1.$$

151. Na figura abaixo, calcule a razão $\frac{JA}{JM}$.

Solução



Consideremos o triângulo AMC e a transversal NJB. Pelo teorema de Menelaus,

$$\frac{JA}{JM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

$$\frac{JA}{JM} \cdot \frac{2x}{5x} \cdot \frac{3y}{y} = 1 \implies \frac{JA}{JM} = \frac{5}{6}$$

Resposta: $\frac{5}{6}$.

152. Demonstre que as três medianas de um triângulo são concorrentes.

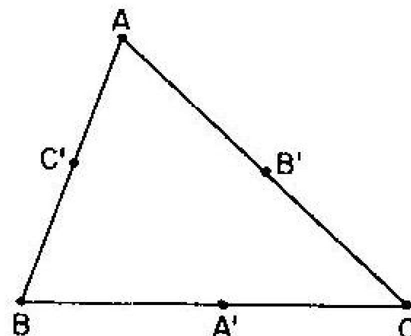
Solução

Como

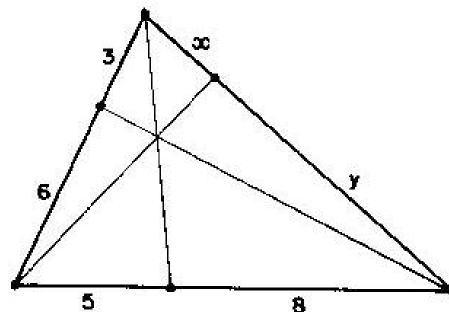
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = 1$$

pelo teorema de Ceva

$$\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A} = 1.$$



153. Calcule a razão $\frac{x}{y}$ na figura.



Solução

Pelo teorema de Ceva,

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot y}{6 \cdot 8 \cdot x} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{16}$$

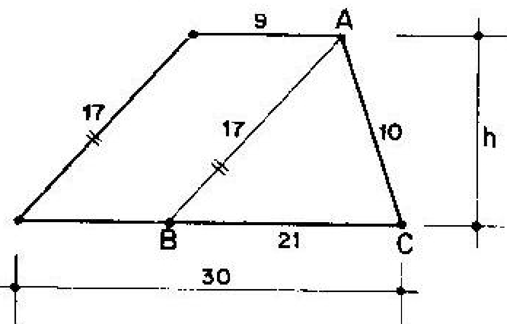
Resposta: $\frac{5}{16}$

154. Calcule a altura de um trapézio cujas bases medem 30 e 9 e cujos lados não paralelos medem 17 e 10.

Solução

Calcularemos a altura do triângulo ABC

$$\left.\begin{matrix} a = 21 \\ b = 10 \\ c = 17 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow p = 24$$



$$h = \frac{2}{21}\sqrt{24(24-21)(24-10)(24-17)}$$

$$h = \frac{2}{21}\sqrt{24 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 7} = \frac{2}{21} \cdot 84 = 8.$$

Resposta: 8

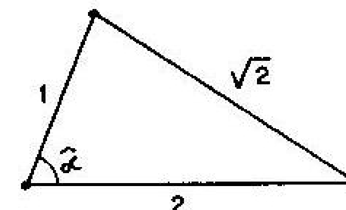
PROBLEMAS PROPOSTOS

155. O triângulo cujos lados medem 20, 29 e 21 é:

A) obtusângulo
B) isósceles
C) retângulo
D) acutângulo
E) NRA.

156. Calcule $\cos \widehat{\alpha}$ na figura.

A) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{3}{4}$
E) NRA.



157. O triângulo cujos lados medem 56, 33 e 66

A) tem um ângulo de 30°
B) é acutângulo
C) é retângulo
D) é obtusângulo
E) NRA.

158. Em um triângulo ABC sabe-se que AC = 7, BC = 8 e $\widehat{B} = 60°$. Então, AB mede:

A) 5
B) 3
C) 5 ou 3
D) 4
E) NRA.

159. Calcule o lado a de um triângulo ABC sabendo que b e c medem 10 e 7 respectivamente e que a projeção de c sobre b mede 0,25.

A) 12
B) 13
C) $\sqrt{143}$
D) $\sqrt{129}$
E) NRA.

160. Calcule o co-seno do ângulo $\widehat{A}$ de um triângulo ABC, onde BC = 8, AC = 7 e AB = 5.

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{6}$
E) $\frac{1}{7}$

161. Calcule a tangente do ângulo $\widehat{C}$ de um triângulo ABC, onde AB = 6, AC = 5 e BC = 3.

A) $4\sqrt{14}$
B) $\sqrt{14}$
C) $-4\sqrt{14}$
D) $-\sqrt{14}$
E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 162 E 163

Em um triângulo ABC sabemos que AB = 6, $\widehat{A} = 60°$ e $\widehat{B} = 45°$.

162. O lado $\overline{AC}$ mede:

A) $6(\sqrt{3} - 1)$
B) $3(\sqrt{3} + 1)$
C) $6(3 - \sqrt{3})$
D) $3 + \sqrt{3}$
E) NRA.

163. A projeção do lado $\overline{BC}$ sobre $\overline{AB}$ mede:

A) $3 + \sqrt{3}$
B) $2(3 - \sqrt{3})$
C) $3(3 - \sqrt{3})$
D) $B(\sqrt{3} + 1)$
E) NRA.

164. Em um triângulo ABC cujos lados medem BC = 8, AC = 6 e AB = 4, considere o ponto M do interior do lado $\overline{BC}$ tal que CM = 2. Então, AM mede:

A) 4
B) $\sqrt{17}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{19}$
E) NRA.

165. Considere o triângulo ABC de lados AB = AC = 6 e BC = 4. Seja M o prolongamento do lado $\overline{AC}$ tal que $\frac{MC}{MA} = \frac{1}{3}$. Então, BM mede:

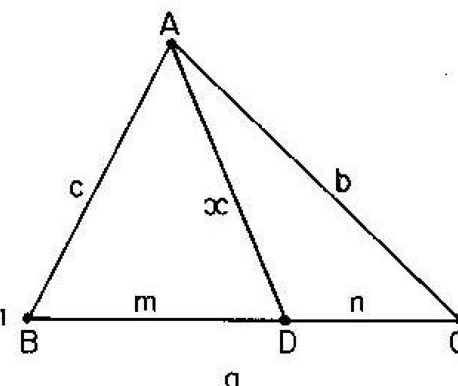
A) $\sqrt{30}$
B) $\sqrt{33}$
C) $\sqrt{35}$
D) $\sqrt{37}$
E) NRA.

166. Considere um quadrante AOB de raio R. Um ponto M do arco AB é tal que sua distância ao raio $\overline{OB}$ é a metade da sua distância no ponto A. Então, MA mede:

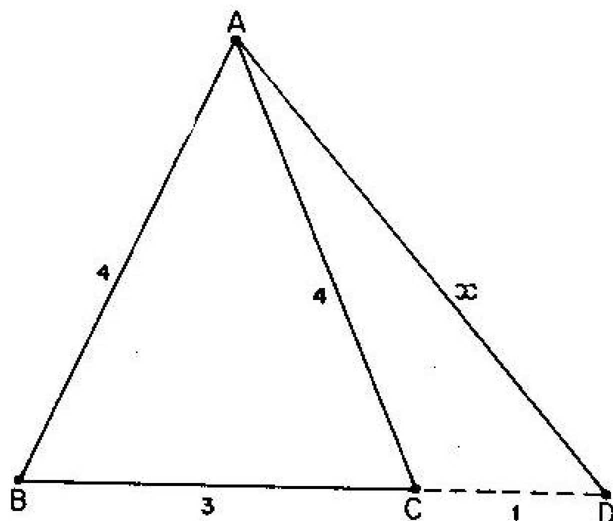
A) R
B) $\frac{4}{3}R$
C) $\frac{3}{2}R$
D) $\frac{2}{3}R$
E) NRA.

167. Em relação à figura abaixo, a partir da relação de Stewart é verdadeiro concluir que:

A) $\frac{b^2 + c^2}{m} = \frac{a^2 + x^2}{n}$
B) $\frac{b^2}{an} + \frac{c^2}{am} = \frac{x^2}{mn}$
C) $\frac{c}{m} + \frac{b}{m} + \frac{x}{a} = 1$
D) $\frac{b^2}{an} + \frac{c^2}{am} - \frac{x^2}{mn} = 1$
E) nada disso.



168. Calcule x na figura.



A) $\sqrt{5}$

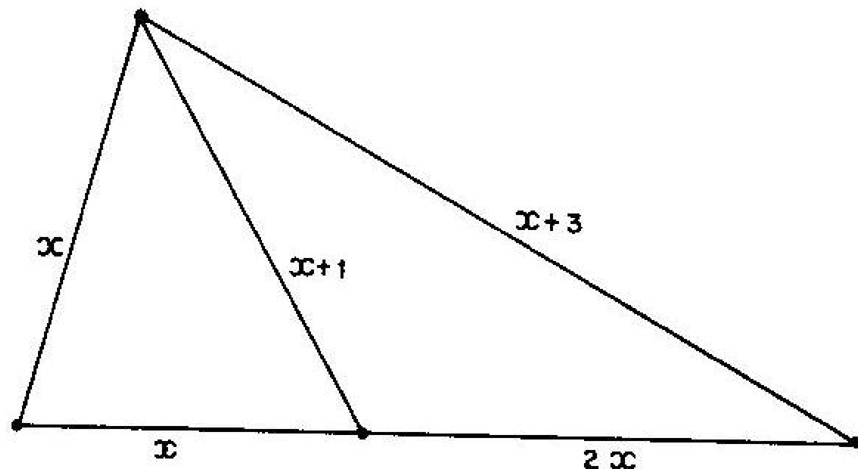
B) $2\sqrt{5}$

C) $3\sqrt{5}$

D) $3\sqrt{2}$

E) NRA.

169. Calcule x na figura.



A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D) o problema é impossível

E) NRA.

170. Em um triângulo de lados 5, 7 e 11, a menor mediana tem comprimento igual a:

A) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

B) $\frac{3}{2}\sqrt{35}$

C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

D) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$

E) NRA.

171. Em um triângulo cujos lados medem 24, 20 e 16, quantas vezes $\sqrt{7}$ está contida na altura relativa ao maior lado?

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) NRA.

172. Se os lados de um triângulo medem: a = 12, b = 10 e C = 8, a bissetriz externa relativa ao lado c tem comprimento igual a:

A) $15\sqrt{2}$

B) $20\sqrt{2}$

C) $25\sqrt{2}$

D) $30\sqrt{2}$

E) NRA.

173. Se os lados de um triângulo medem: a = 5, b = 7 e c = 8, então a razão entre a altura relativa ao lado a e a bissetriz interna relativa ao lado b é:

A) $\frac{10}{13}$

B) $\frac{13}{10}$

C) $\frac{5}{8}$

D) $\frac{8}{5}$

E) NRA.

174. Os lados de um triângulo ABC medem: AB = 13, AC = 15 e BC = 14. Se H é o ortocentro do triângulo, então HA mede:

A) 8

B) 8,2

C) 8,25

D) 8,4

E) NRA.

175. A soma dos senos dos ângulos de um triângulo é:

A) $\frac{p}{R}$ C) $\frac{p}{2R}$ p = semiperímetro, R = raio do círculo inscrito.

B) $\frac{2p}{R}$ D) $\frac{2R}{p}$

E) NRA.

176. Os lados de um triângulo ABC são a, b e c. O valor de

$$\frac{\cos \widehat{A}}{a} + \frac{\cos \widehat{B}}{b} + \frac{\cos \widehat{C}}{c}$$ é:

A) $a^2 + b^2 + c^2$ C) $\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$

B) $\frac{1}{a + b + c}$ D) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

E) NRA.

177. Um trângulo ABC tem lados a, b e c. Se $\widehat{B} + 2\widehat{A}$, então:

A) $\text{sen } \widehat{B} = 2 \text{ sen } \widehat{A}$ C) $\cos \widehat{A} = \frac{b}{2a}$

B) $\text{sen } \widehat{A} = \frac{a}{b + c}$ D) $\text{sen } \widehat{C} = \text{sen } \widehat{A} + \text{sen } \widehat{B}$

E) NRA.

178. Na figura abaixo, $\frac{JA}{JM}$ vale:

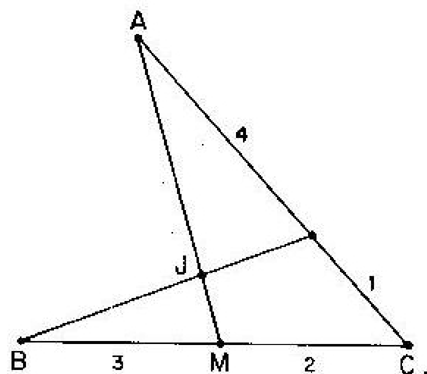
A) 4

B) 5

C) $\frac{16}{3}$

D) $\frac{20}{3}$

E) NRA.



179. Calcule x na figura.

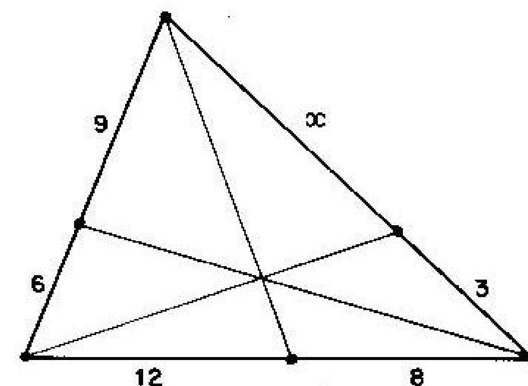
A) 6

B) 6,5

C) 6,75

D) 9

E) NRA.



180. Calcule x na figura, sendo:

AB = 6

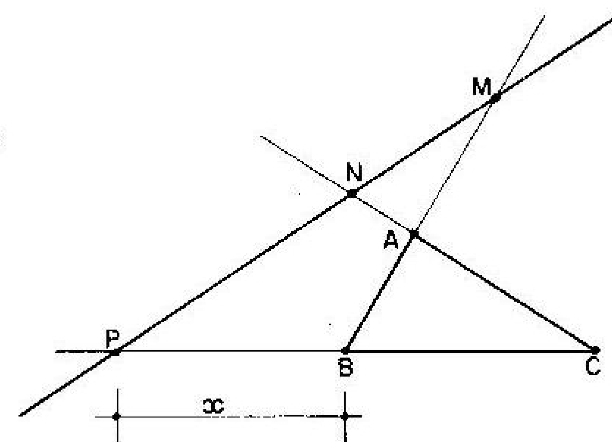
AC = 8

BC = 10

MA = 6

NA = 2

PB = x



A) 10

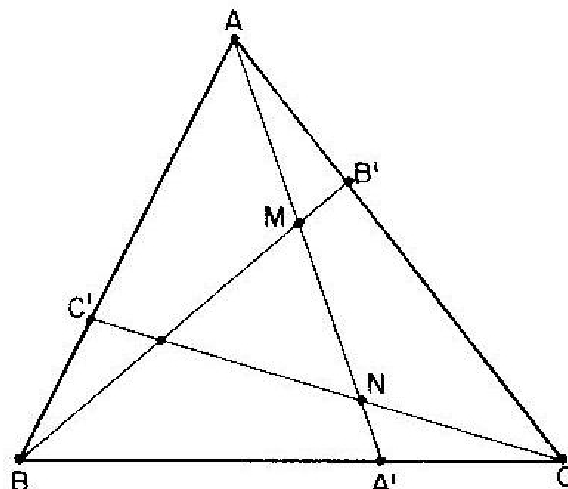
B) $\frac{20}{3}$

C) $\frac{25}{3}$

D) 15

E) NRA.

181. Na figura abaixo,



$$A'C = \frac{1}{3} BC,$$

$$B'A = \frac{1}{3} CA \quad e$$

$$C'B = \frac{1}{3} AB.$$

A razão $\frac{MN}{AA'}$ é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{7}$

D) $\frac{4}{9}$

E) $\frac{5}{9}$

182. Se G é o baricentro de um triângulo ABC, demonstre que

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\,(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

183. Dado um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e um ponto D qualquer de sua base, prove que

$$AB^2 - AD^2 + BD \cdot DC.$$

184. Determine o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante e igual a k^2.

185. Seja ABCD um retângulo. Prove que para um ponto P qualquer

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

186. Seja ABCD um retângulo de centro O. Prove que, se um ponto P varia sobre um círculo de centro O,

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

permanece constante.

187. São dados dois círculos concêntricos. De um ponto P variável do círculo exterior traçam-se $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, sendo A e B extremos de um diâmetro do círculo interior. Mostre que $PA^2 + PB^2$ é constante.

188. Determine o lugar geométrico dos pontos P tais que $PA^2 + 3PB^2 = k^2$, k constante.

189. Sendo M e N os pontos que dividem em três segmentos congruentes a hipotenusa $\overline{BC}$ de um triângulo retângulo ABC, demonstre que

$$AM^2 + AN^2 + MN^2 = \frac{2}{3} BC^2.$$

190. Determinar o lugar geométrico dos pontos cuja diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos A e B é constante e igual a k^2.

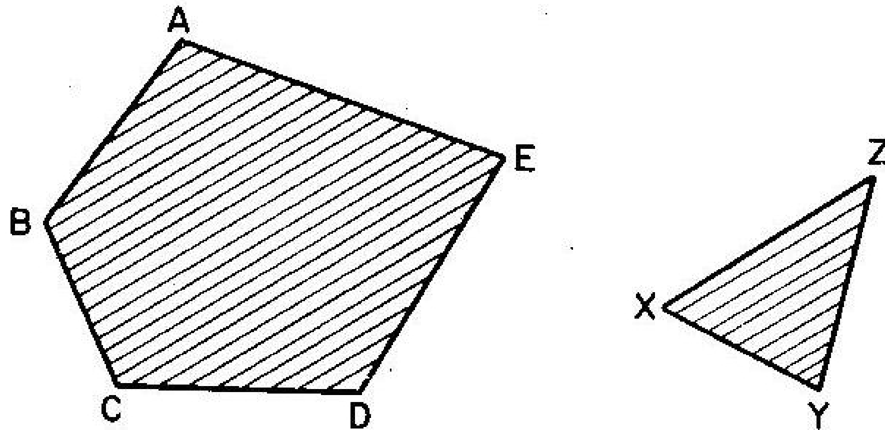
CAPÍTULO 6

ÁREAS

INTRODUÇÃO

6.1 — DEFINIÇÕES

Estudamos até agora nas figuras geométricas a sua forma, as medidas de seus ângulos e os comprimentos dos segmentos que as compõem, assim como relações entre eles. Vamos agora estudar a extensão* das superfícies limitadas pelas figuras. Na figura abaixo, notamos que a *superfície* do pentágono ABCDE é claramente maior que a do triângulo XYZ.



Duas figuras se chamam EQUIVALENTES se possuem igual extensão, independente de suas formas. Imagine o leitor que, depois de recortarmos em uma mesma folha de papel duas figuras quaisquer

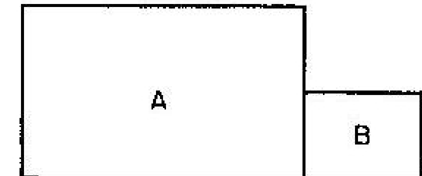
* A extensão é um conceito primitivo.

A e B, vamos pesá-las em uma balança de precisão. Se encontrarmos pesos iguais, é porque a extensão de suas superfícies é a mesma, sendo as figuras, portanto, equivalentes. Escreveremos, neste caso,

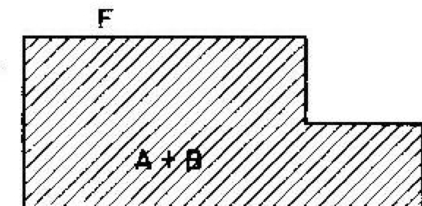
$$A \approx B.$$

Se o peso de A for maior que o de B, então a superfície de A é maior que a de B e escreveremos

$$A > B.$$

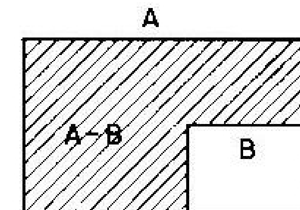


Sejam A e B duas figuras tais que sua interseção seja vazia ou sejam apenas pontos de seus contornos. A reunião de suas superfícies se chama *soma* das referidas figuras. Assim,



$$F = A + B.$$

Se B está contida em A, definiremos *diferença* entre estas figuras a superfície formada pelos pontos de A que não pertencem a B. Se A e B são os retângulos da figura ao lado, e F é a figura hachurada, então



$$F = A - B.$$

6.2 — AXIOMAS

A 1 — Duas figuras congruentes são equivalentes

$$A \equiv B \implies A \approx B.$$

A 2 — A equivalência goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

i) $A \approx A$

ii) $A \approx B \iff B \approx A$

iii) $\left.\begin{matrix} A \approx B \\ B \approx C \end{matrix}\right\} \implies A \approx C.$

A 3 — As somas (ou diferenças) de figuras equivalentes são equivalentes.

$$\left.\begin{matrix} A_1 \approx A_2 \\ B_1 \approx B_2 \end{matrix}\right\} \implies A_1 + B_1 \approx A_2 + B_2$$

6.3 — TEOREMA

Se duas figuras podem ser divididas em igual número de outras respectivamente congruentes, então são equivalentes.

Realmente, se F_1 pode ser dividida nas partes A_1, B_1, C_1 .... e se F_2 pode ser dividida nas partes A_2, B_2, C_2 ....., e se

$$A_1 \equiv A_2$$

$$B_1 \equiv B_2$$

$$C_1 \equiv C_2$$

....

....   temos

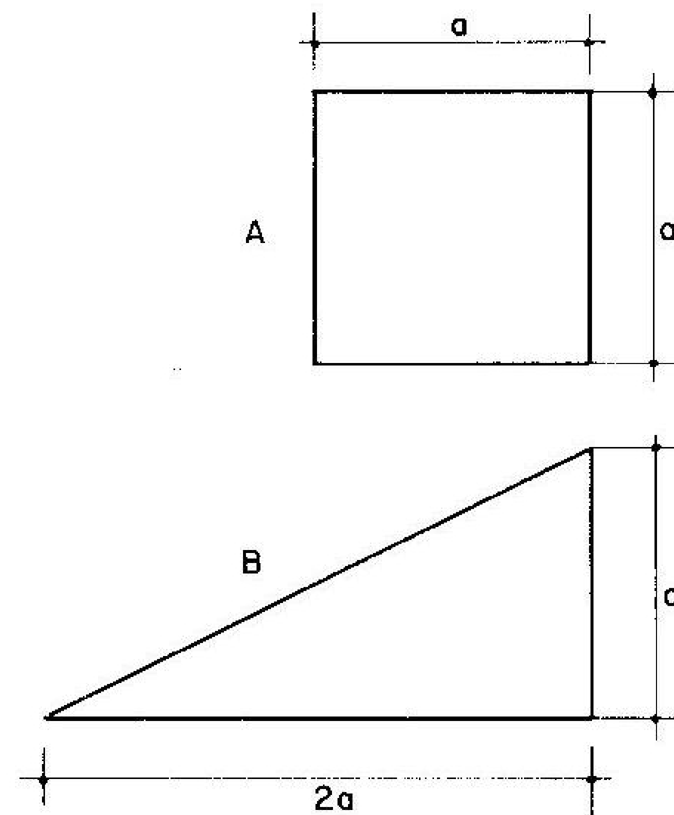
como $F_1 = A_1 + B_1 + C_1 + \ldots\ldots$ e

$F_2 = A_2 + B_2 + C_2 + \ldots\ldots$

por 7.2 — A1 e A3 concluímos que

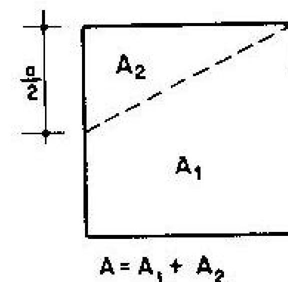
$$F_1 \approx F_2$$

Exemplo

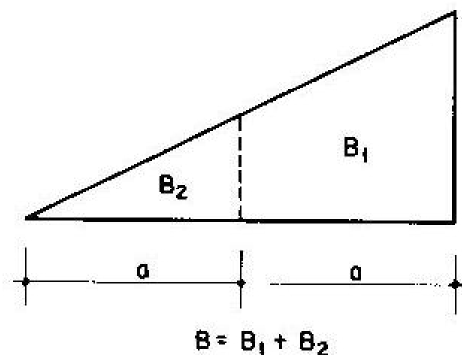


Sejam A um quadrado de lado a e B um triângulo retângulo de catetos a e $2a$.

Dividamos o quadrado em duas partes A_1 e A_2, como mostra a figura.



Dividamos também o triângulo em duas partes B_1 e B_2, como mostra a figura.



Verificamos imediatamente que:

$$A_1 \equiv B_1 \quad \text{e}$$

$$A_2 \equiv B_2$$

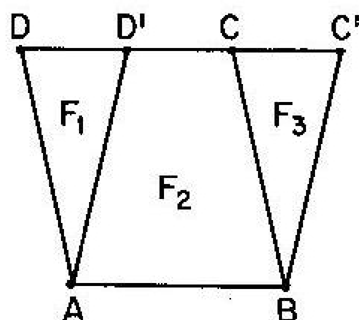
Logo, podemos concluir que

$$A \approx B.$$

6.4 — TEOREMA

Dois paralelogramos de bases e alturas congruentes são equivalentes.

1.° caso — $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ têm um segmento ou um ponto comum



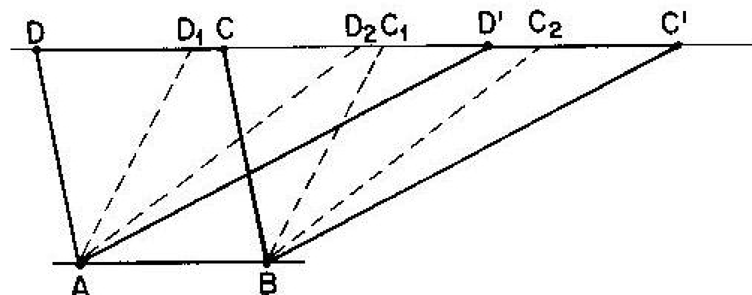
$$ABCD = F_1 + F_2$$

$$ABC'D' = F_2 + F_3$$

Como $F_1 \approx F_2$ e $F_1 \approx F_3$,

$$ABCD \approx ABC'D'$$

2.° caso — $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ não têm ponto comum.

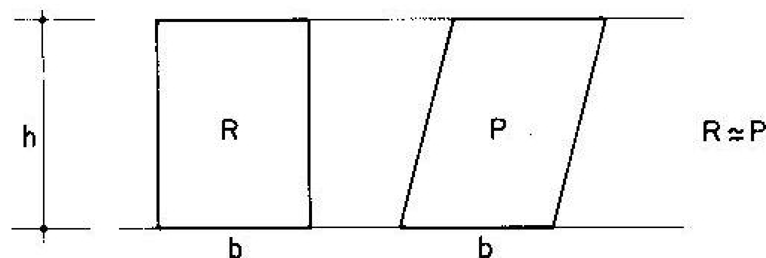


Considerando tantos paralelogramos intermediários quantos necessários, temos

$$ABCD \approx ABC_1D_1 \approx ABC_2D_2 \approx ABC'D'$$

6.5 — OBSERVAÇÃO

Em vista do demonstrado em 7.5, podemos afirmar que todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de mesma base e altura.



6.6 — ÁREA DE UMA FIGURA

Vamos associar a toda superfície limitada um número real positivo ou nulo

$$A \longmapsto S(A)$$

Assim, a uma figura A foi associado um número S(A) (área de A) tal que:

1) Duas figuras equivalentes possuem áreas iguais

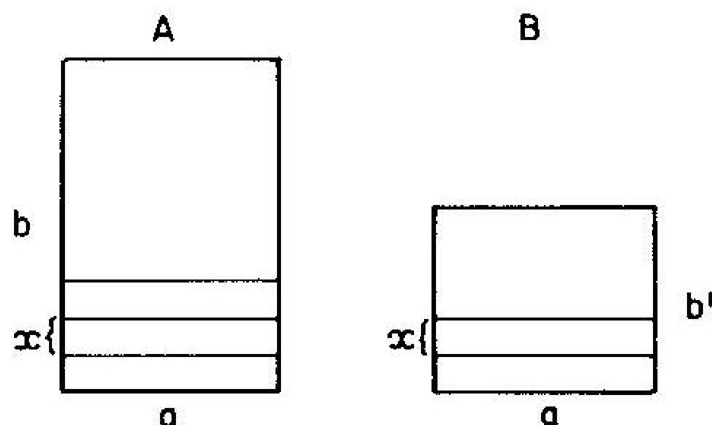
$$A \approx B \implies S(A) = S(B)$$

2) A área de uma figura composta de várias partes é a soma das áreas dessas partes.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots \implies$$
$$\implies S(A) = S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \ldots\ldots$$

6.7 — TEOREMA

A razão entre as áreas de dois retângulos de bases congruentes é a razão entre suas alturas



Sejam b e b′ comensuráveis. Logo, existe um número x que "cabe" um número inteiro de vezes em b e em b′. Temos então

$$\begin{matrix} b = mx \\ b' = hx \end{matrix} \implies \frac{b}{b'} = \frac{m}{n} \quad (I)$$

Podemos, então, dividir A e B em retângulos congruentes de base a e altura x. Se *s* é a área de cada um deles, temos

$$\begin{matrix} S(A) = ms \\ S(B) = ns \end{matrix} \implies \frac{S(A)}{S(B)} = \frac{m}{n} \quad (II)$$

Por I e II, temos

$$\boxed{\frac{S(A)}{S(B)} = \frac{b}{b'}}$$

Se b e b′ não forem comensuráveis, chegaremos a idêntico resultado, pois x pode ser tão pequeno quanto se queira. Assim, podemos dizer que

"A razão entre as áreas de dois retângulos que possuem uma dimensão congruente é a razão entre as dimensões não congruentes."

6.8 — TEOREMA

A razão entre as áreas de dois retângulos é a razão entre os produtos de suas dimensões.

Sejam

retângulos	dimensões	área
A	a_1 , b_1	s (A)
B	a_2 , b_2	s (B)

consideremos

C	a_1 , b_2	s (C)

Por 7.8, podemos escrever

$$\frac{S(A)}{S(C)} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{S(C)}{S(B)} = \frac{a_1}{a_2}$$

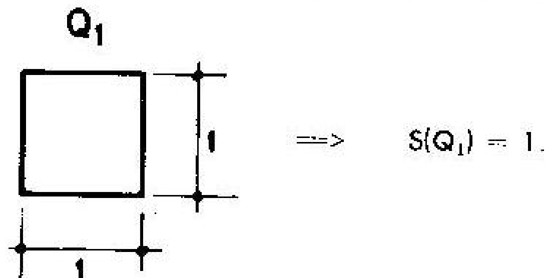
Multiplicando,

$$\frac{S(A)}{S(C)} \cdot \frac{S(C)}{S(B)} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{S(A)}{S(B)} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}}$$

6.9 — UNIDADE DE ÁREA

Devemos considerar a superfície de extensão unitária. Esta é arbitrária, como acontece com qualquer unidade. Consideraremos, então, como nossa unidade de área a área do quadrado de lado unitário



$$\Longrightarrow \quad S(Q_1) = 1.$$

6.10 — ÁREA DO RETÂNGULO

Sejam

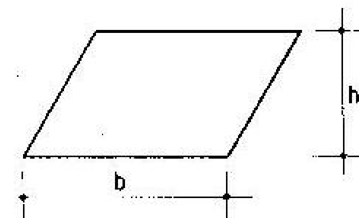
retângulos	dimensões	área
R	a , b	s
Q_1	1 , 1	1

Por 7.9, temos

$$\frac{S}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} \Longrightarrow \boxed{S = ab}$$

6.11 — ÁREA DO PARALELOGRAMO

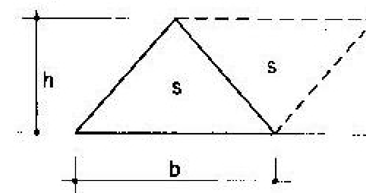
Consideremos um paralelogramo de base *b*, altura *h* e área S. Tendo em vista o demonstrado em 7.5 e 7.6, concluímos



$$\boxed{S = b \cdot h}$$

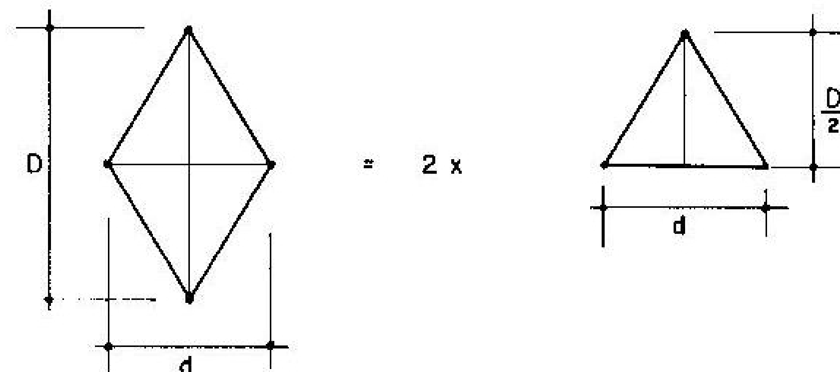
6.12 — ÁREA DO TRIÂNGULO

Consideremos um paralelogramo de base *b*, altura *h* e área 2*S*, e o triângulo formado por dois lados consecutivos e uma diagonal, como mostra a figura. Naturalmente que *S* é a área de cada um dos triângulos congruentes em que o paralelogramo ficou dividido. Assim,



$$2S = bh \Longrightarrow \boxed{S = \frac{bh}{2}}$$

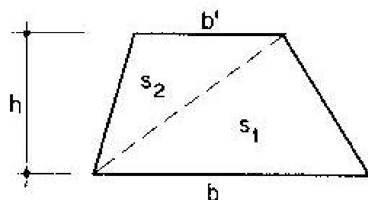
6.13 — ÁREA DO LOSANGO



Seja S a área de um losango de diagonais *D* e *d*. Temos então

$$S = 2\,\frac{d\cdot\frac{D}{2}}{2} \implies \boxed{S = \frac{D\cdot d}{2}}$$

6.14 — ÁREA DO TRAPÉZIO



Seja S a área de um trapézio de bases *b* e *b'* e altura *h*. Por meio de uma diagonal, dividimos o trapézio em dois triângulos de áreas S_1 e S_2. Então,

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \frac{bh}{2} + \frac{b'h}{2} \implies \boxed{S = \frac{b + b'}{2}\cdot h}$$

ou simplesmente $\implies \boxed{S = b_m \cdot h}$

6.15 — ÁREA DO POLÍGONO REGULAR

Sejam

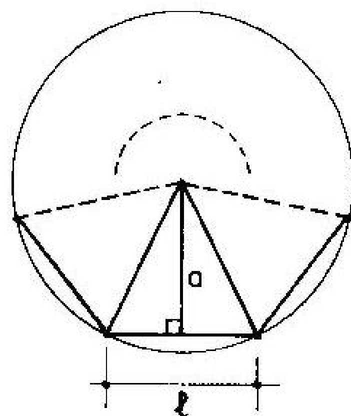
S = área do polígono regular

l = medida do lado

a = medida do apótema

n = número de lados

p = semiperímetro do polígono



Como o polígono pode ser dividido em *n* triângulos congruentes de base *l* e altura *a*, temos

$$S' = n\,.\,\frac{l\cdot a}{2}.$$

Mas $n\cdot l$ é o perímetro do polígono; logo,

$$S = \frac{2p\cdot a}{2} \implies \boxed{S = pa}$$

6.16 — ÁREA DO CÍRCULO

Seja S a área de um círculo de raio R e seja S_P a área de um polígono regular de *n* lados nele inscrito.

$$\text{Se } n \to \infty, \text{ então } \begin{cases} P \to \pi R^{*} \\ a \to R \\ S_P \to S \end{cases}$$

Assim,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_P = \lim_{n\to\infty} pa = \pi R\cdot R = \pi R. \quad \text{Então,}$$

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

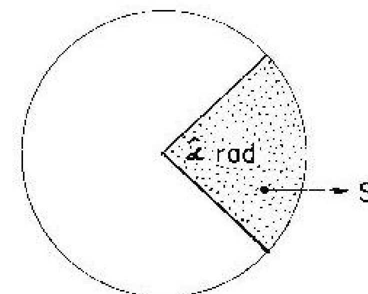
6.17 — ÁREA DE UM SETOR CIRCULAR

Como a área do setor varia linearmente com o ângulo central,

$S = m\hat{\alpha}$. Mas

se $\hat{\alpha} = 2\pi$ rd, $S = \pi R^2$. Logo,

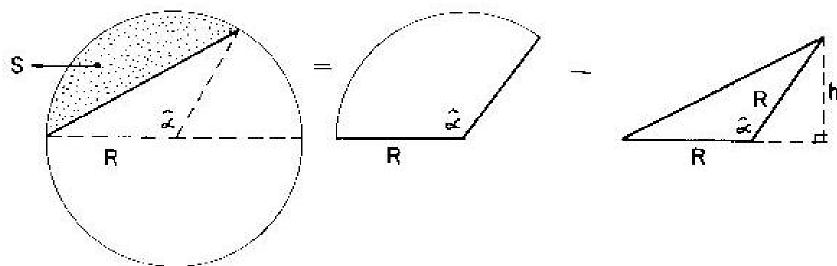
$$\pi R^2 = m\,2\pi \implies m = \frac{R^2}{2}.$$



* O comprimento do círculo é dado em função do raio por $C = 2\pi R$, onde π é uma constante aproximadamente igual a 3,1416.

Assim, $$S = \frac{\hat{\alpha} R^2}{2}$$

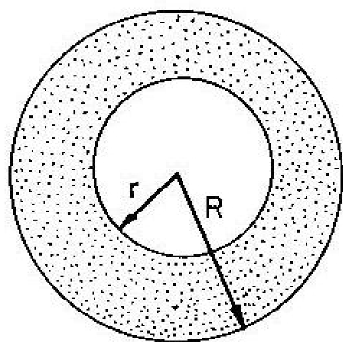
6.18 — ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR



$$S = \frac{\hat{\alpha} R^2}{2} - \frac{R \cdot R \,\text{sen}\,\hat{\alpha}}{2} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \frac{R^2}{2}(\hat{\alpha} - \text{sen}\,\hat{\alpha})} \quad \hat{\alpha} \text{ em rd.}$$

6.19 — ÁREA DA COROA CIRCULAR



$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$



$$\boxed{S = \pi (R^2 - r^2)}$$

6.20 — ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DOS LADOS

Consideremos um triângulo de área S, lados a, b e c e alturas h_a, h_b, h_c.

$$S = \frac{a h_a}{2} = \frac{b h_b}{2} = \frac{c h_c}{2} \implies$$

$$\implies \boxed{a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S} \quad \text{I}$$

Sabemos que

$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo p seu semiperímetro.

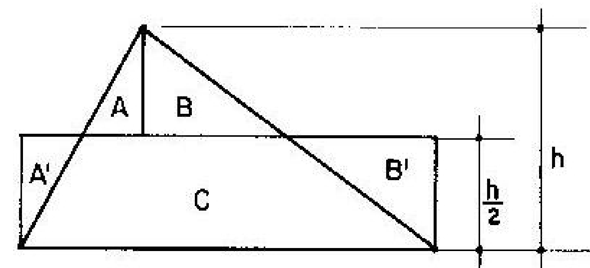
Multiplicando por $\frac{a}{2}$ vem

$$\frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \; *$$

6.21 — TEOREMA

Um triângulo é equivalente a um retângulo de mesma base que a do triângulo e altura igual à metade da do triângulo.



* Este radical é conhecido como "radical de Heron". Heron — séc. I d.C.

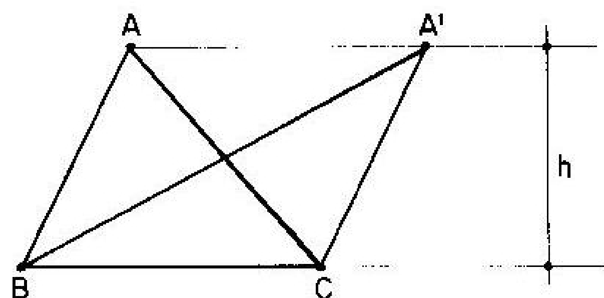
$$T = A + B + C$$

$$R = A' + B' + C \qquad \text{mas}$$

$$\left.\begin{matrix} A \approx A' \\ B \approx B' \\ C \approx C \end{matrix}\right\} \Rightarrow T \approx R$$

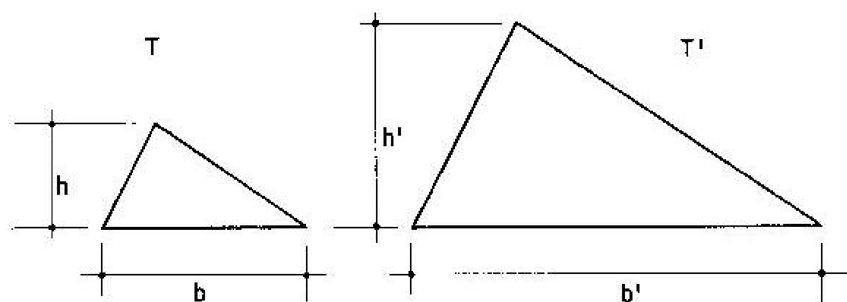
Daí concluímos que

Dois triângulos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes



$S(ABC) = S(A'BC)$

6.22 — RAZÃO ENTRE ÁREAS DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES



Sejam $S(T) = S$

$S(T') = S'$

Se $T \sim T' \Rightarrow \dfrac{b}{b'} = \dfrac{h}{h'} = k$ (razão de semelhança).

Então,

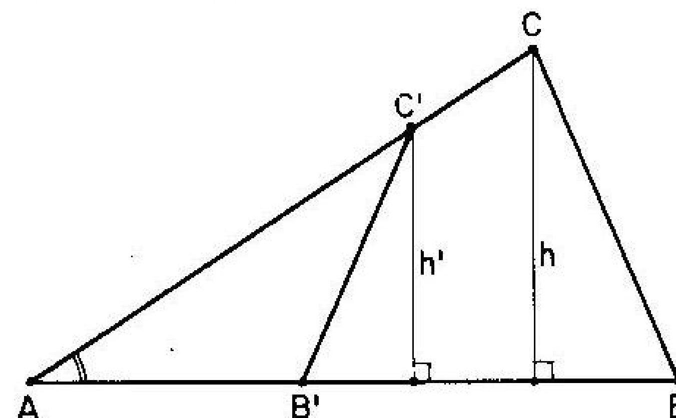
$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}\, b\, h}{\frac{1}{2}\, b'\, h'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S}{S'} = k^2}$$

Portanto, a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Estendemos facilmente esta conclusão para polígonos e demais figuras semelhantes.

6.23 — RAZÃO ENTRE ÁREAS DE TRIÂNGULOS QUE POSSUEM UM ÂNGULO COMUM



Consideremos os triângulos ABC e AB'C' da figura que possuem o ângulo $\hat{A}$ em comum. Sejam S e S' suas áreas e h e h' as alturas traçadas de C e C', respectivamente. Temos então

$$S = \frac{AB \cdot h}{2} \qquad S' = \frac{AB' \cdot h'}{2}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{h}{h'}$$

$$\text{Mas} \quad \frac{h}{h'} = \frac{AC}{AC'} \quad \text{Logo,}$$

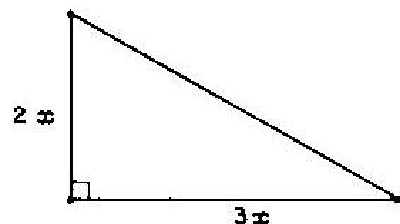
$$\boxed{\frac{S}{S'} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}}$$

A razão entre as áreas de dois triângulos que possuem um ângulo comum é a razão entre os produtos dos lados que em cada triângulo formam esse ângulo.

6.24 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

101. Calcule os catetos de um triângulo retângulo de área igual a 108 ua* sabendo que são proporcionais a 2 e 3.

Solução



$$108 = \frac{2x \cdot 3x}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 = 36 \Longrightarrow x = 6.$$

Resposta: 12 e 18.

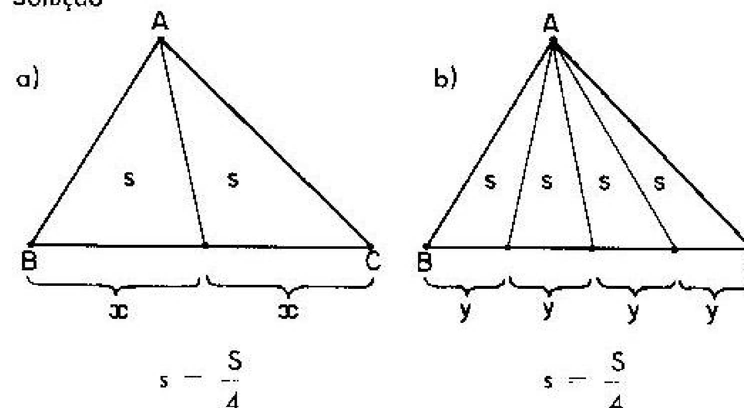
* Unidades de área.

192. Dividir um triângulo ABC

a) em duas partes equivalentes por uma ceviana

b) em quatro partes equivalentes por meio de três cevianas.

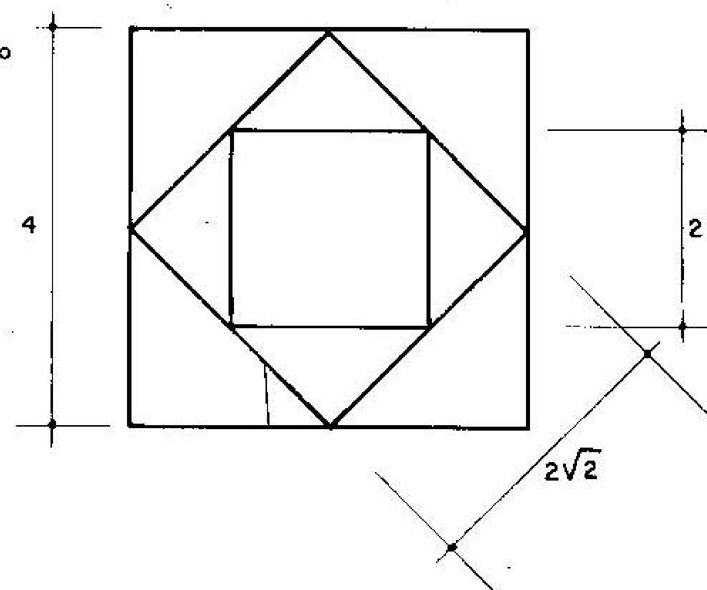
Solução



$$s = \frac{S}{4} \qquad s = \frac{S}{4}$$

193. Considere um quadrado de lado a, um segundo quadrado cujos vértices são os pontos médios do primeiro, um terceiro formado pelos pontos médios do segundo e assim sucessivamente. Calcule o limite da soma das áreas dos quadrados.

Solução



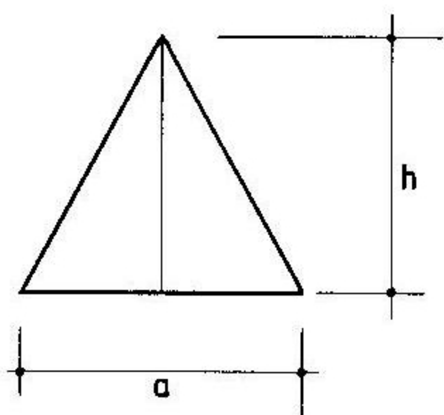
lados	áreas
4	16
$2\sqrt{2}$	8
2	4
⋮	⋮

$$\lim S = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32$$

Resposta: 32 ua

194. Calcule a área de um triângulo eqüilátero de lado *a*.

Solução



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

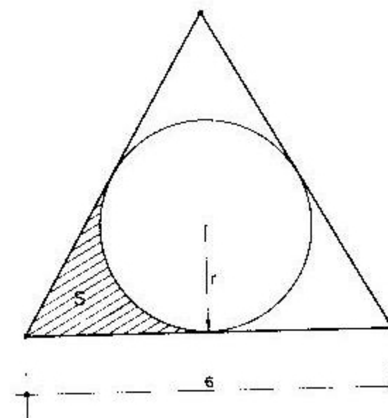
$$S = \frac{ah}{2} \implies$$

$$S = \frac{a\,\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

195. Sendo eqüilátero o triângulo da figura, calcule a área assinalada.

Solução



$$S = \frac{\triangle - \bigcirc}{3}$$

$$S_\triangle = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\,\frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

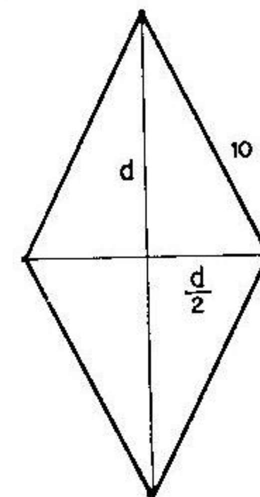
$$S_\bigcirc = \pi r^2 = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

$$S = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{3} = 3\sqrt{3} - \pi$$

Resposta: $3\sqrt{3} - \pi$ ua

196. Calcule a área de um losango de perímetro 40 sabendo que uma diagonal é o dobro da outra.

Solução



$$D = 2d$$

$$S = \frac{2d \cdot d}{2} = d^2$$

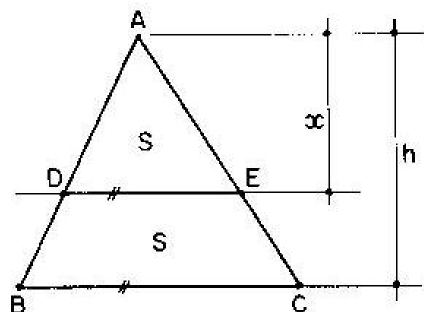
$$100 = d^2 + \frac{d^2}{4} = \frac{5d^2}{4} \implies$$

$$\implies d^2 = 80 \implies$$

$$S = 80$$

Resposta: 80

197. Um triângulo de altura h é dividido por uma reta paralela à base em duas partes equivalentes. Calcule a distância desta reta ao vértice.



Solução

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

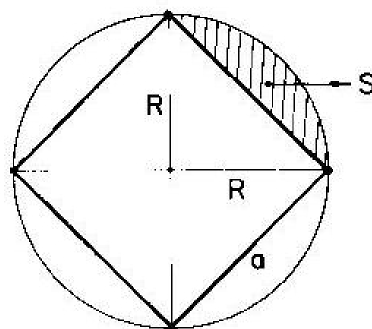
razão de semelhança $k = \frac{x}{h}$. Sabemos que a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança. Então,

$$\frac{S}{2S} = \frac{x^2}{h^2}$$

$$x^2 = \frac{h^2}{2} \Longrightarrow x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: $\frac{h\sqrt{2}}{2}$

198. A figura abaixo mostra um quadrado e seu círculo circunscrito. Se a área assinalada é igual a $\pi - 2$, calcule o lado do quadrado.



Solução

S = (quarto de círculo) — (triângulo)

$$\pi - 2 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R \cdot R}{2}$$

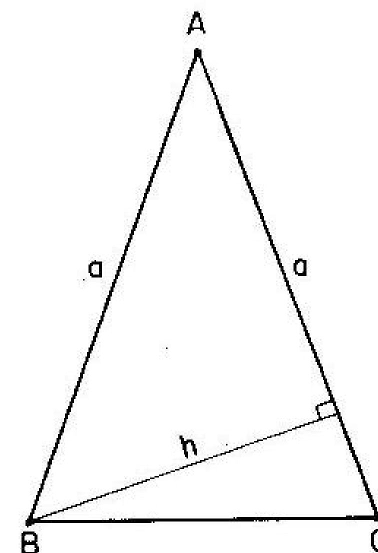
$$\pi - 2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow R^2 = 4 \Longrightarrow R = 2.$$

O lado do quadrado será $a = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Resposta: $2\sqrt{2}$

199. Num triângulo isósceles ABC, AB = AC = a. Calcule sua área sabendo que é máxima.



Solução

Seja h a altura relativa ao lado $\overline{AC}$. Então,

$$h = a \operatorname{sen} \widehat{A} \quad e$$

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot a \operatorname{sen} \widehat{A}}{2}$$

A área será máxima se $\operatorname{sen} \widehat{A} = 1 \Longrightarrow \widehat{A} = 90°$. Então,

$$S = \frac{a^2}{2}$$

Resposta: $\frac{a^2}{2}$.

200. IME — 65.

Divida a área de um círculo de raio R em n partes equivalentes por meio de círculos concêntricos de raios $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i \dots r_{n-1}$. Estabelecer o valor de r_i em função de R, n e i.

Solução

A área de cada parte será

$$s = \frac{\pi R^2}{n}$$

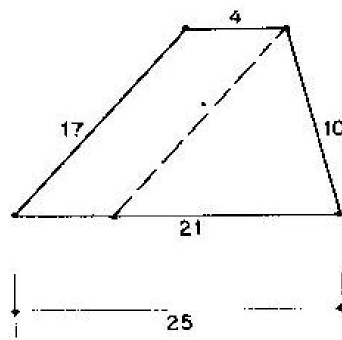
Como o círculo r_i está dividido em *i* partes equivalentes,

$$\pi r_i^2 = i\,\frac{\pi R^2}{n} \implies r_i = R\sqrt{\frac{i}{n}}$$

Resposta: $R\sqrt{\frac{i}{n}}$.

201. Calcule a área do trapézio de bases 25 e 4 e lados não paralelos 17 e 10.

Solução



Calculemos a altura do trapézio.

Traçando por um dos vértices da base menor uma paralela a um dos lados oblíquos, formamos um triângulo de lados 17, 10 e 21. Sua altura será:

$$\left.\begin{array}{l} a = 21 \\ b = 17 \\ c = 10 \end{array}\right\} \implies p = 24$$

$$h_a = \frac{2}{21}\sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 8$$

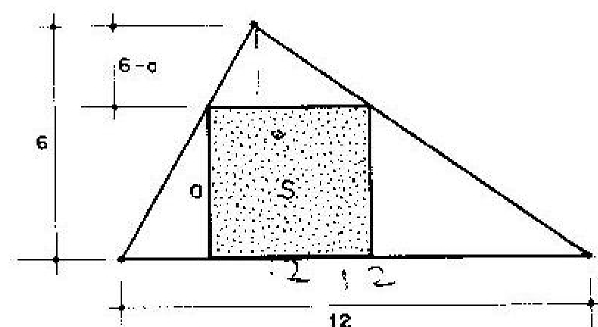
Então, a área do trapézio será

$$S = \frac{25 + 4}{2} \cdot 8 = 116$$

Resposta: 116 ua

202. Calcule a área do quadrado inscrito em um triângulo de base 12 e altura 6

Solução



$$\frac{a}{12} = \frac{6 - a}{6} \implies$$

$\implies a = 4.$

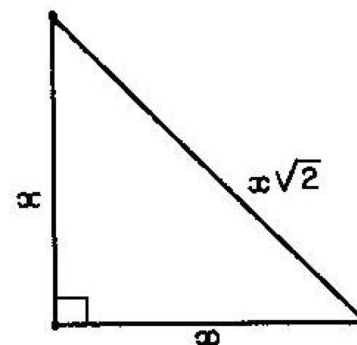
Então,

$S = 4^2 = 16$

Resposta: 16 ua

203. O perímetro de um triângulo isósceles é 2p. Calcule a área desse triângulo.

Solução



$$x + x + x\sqrt{2} = 2p \implies$$

$$\implies x = p(2 - \sqrt{2})$$

$$S = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{p^2(2 - \sqrt{2})^2}{2}$$

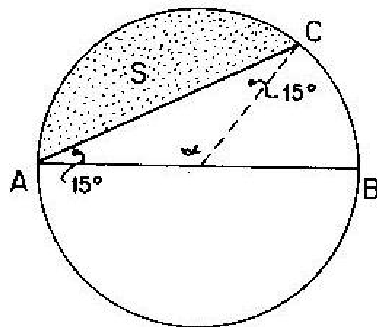
$$S = p^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

Resposta: $p^2(3 - 2\sqrt{2})$.

204. Em um círculo de raio R, $\overline{AB}$ é um diâmetro e $\overline{AC}$ uma corda que forma 15° com esse diâmetro. Calcule a área do menor dos segmentos circulares determinados pela corda $\overline{AC}$.

Solução

$$x = \frac{R^2}{2}(\widehat{\alpha} - \operatorname{sen}\widehat{\alpha}) \quad \text{v. 6.18}$$



$$\widehat{\alpha} = 150° = \frac{5\pi}{6} \text{ rd}$$

$$\operatorname{sen}\widehat{\alpha} = \frac{1}{2}$$

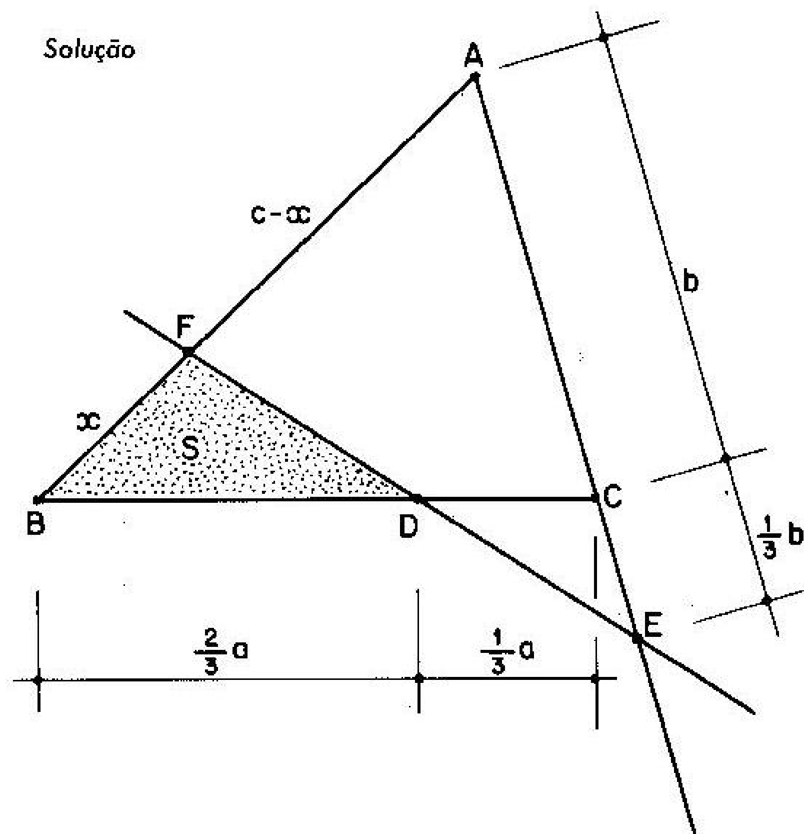
$$S = \frac{R^2}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

$$S = \frac{R^2}{12}(5\pi - 3)$$

Resposta: $\frac{R^2}{12}(5\pi - 3)$.

205. O triângulo ABC de lados a, b e c da figura tem área igual a 36 ua. Se $DC = \frac{a}{3}$ e $CE = \frac{b}{3}$, calcule a área do triângulo BDF.

Solução



Pelo teorema de Menelaus,

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \implies$$

$$\implies \frac{c - x}{x} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1 \implies x = \frac{c}{3}$$

Como BDF e BCA têm o ângulo $\widehat{B}$ em comum,

$$\frac{S}{36} = \frac{BF \cdot BD}{BA \cdot BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \implies$$

$$\implies S = 8 \text{ ua}$$

Resposta: 8 ua

PROBLEMAS PROPOSTOS

206. Calcule a área do retângulo de perímetro igual a 14 sabendo que sua diagonal mede 5.

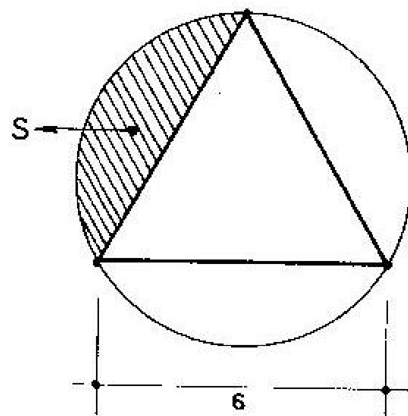
A) 6
B) 8
C) 12
D) 16
E) NRA.

207. Os lados de um paralelogramo medem 10 e $6\sqrt{3}$. Se esses lados formam 60°, sua área mede:

A) 90
B) 120
C) 60
D) 75
E) NRA.

208 A figura abaixo representa um triângulo eqüilátero de lado 6 e seu círculo circunscrito. A área assinalada mede:

A) $2\pi - \sqrt{3}$
B) $3\pi - 2\sqrt{3}$
C) $4\pi - 3\sqrt{3}$
D) $12\pi - 9\sqrt{3}$
E) NRA.



209. Dois triângulos são semelhantes, sendo a razão de semelhança igual a 3. A razão entre suas áreas é:

A) 3
B) 6
C) 9
D) 27
E) NRA.

210. Dois círculos de centros A e B e raios R e 4R são tangentes exteriormente. Uma reta é tangente em C e D aos dois círculos. A área do quadrilátero ABCD é:

A) $4R^2$
B) $5R^2$
C) $8R^2$
D) $10R^2$
E) NRA.

211. Calcule o perímetro de um losango em que uma diagonal mede 10 equivalente a um quadrado de lado igual a 5.

A) $\frac{5}{2}\sqrt{5}$
B) $5\sqrt{5}$
C) $10\sqrt{5}$
D) $5\sqrt{10}$
E) NRA.

212. Considere dois círculos concêntricos de raios R e 2R e centro O. Considere uma corda AB do círculo maior tangente ao círculo menor. Se a área do setor AOB é $k\pi R^2$, k vale:

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{3}{2}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{3}$
E) NRA.

213. Se o raio de um círculo é multiplicado por 2,5, a sua área fica multiplicada por:

A) 5
B) 10
C) 25
D) 125
E) NRA

214. A área de um triângulo retângulo em que um cateto mede 45 e a hipotenusa 53 é:

A) 1.260
B) 930
C) 760
D) 630
E) NRA.

215. Em um trapézio isósceles de bases 10 e 6, as diagonais são perpendiculares aos lados oblíquos às bases. A área desse trapézio é:

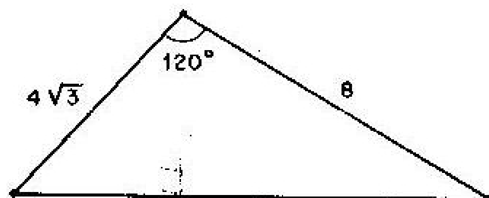
A) 32 C) 24
B) 28 D) 20
E) NRA.

216. O círculo inscrito em um setor de 60° e raio R tem área kR^2, nde k vale:

A) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{10}$
B) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{4}{15}$
E) $\frac{1}{9}$

217. A área do triângulo da figura é:

A) 12
B) 18
C) 20
D) 30
E) NRA.



218. Um trapézio retângulo de bases 9 e 4 tem diagonais perpendiculares. Sua área é:

A 26 C) 52
B) 39 D) 78
E) NRA.

219. A área de um círculo inscrito em um triângulo eqüilátero é 36π. A altura desse triângulo mede:

A) 6 C) 18
B) 12 D) 24
E) NRA.

220. Se o raio de um círculo aumenta de 10%, sua área aumenta de:

A) 10% C) 21%
B) 20% D) 100%
E) NRA.

221. A área de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 8 é:

A) $64\sqrt{3}$ C) $84\sqrt{3}$
B) $72\sqrt{3}$ D) $96\sqrt{3}$
E) NRA.

222. Os catetos de um triângulo retângulo medem 16 e 30. A área do círculo circunscrito a esse triângulo é:

A) 174π C) 289π
B) 211π D) 316π
E) NRA.

223. O lado de certo quadrado aumenta de 30%. Sua área então aume:ta de:

A) 15% C) 60%
B) 30% D) 69%
E) 27%

224. A área de um segmento circular de raio R e ângulo central de 60° é:

A) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$ C) $\frac{R^2}{6}(2\pi - \sqrt{3})$
B) $\frac{R^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{12}(\pi - \sqrt{3})$
E) NRA.

225. A área de um setor circular de raio R e ângulo central de 30° é:

A) $\frac{R^2}{12}(\pi - 6)$ C) $\frac{R^2}{12}(\pi - 3)$
B) $\frac{R^2}{6}(\pi - 3)$ D) $\frac{R^2}{6}(\pi - 3)$
E) NRA.

226. A razão entre as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$

E) NRA.

227. A área de um triângulo eqüilátero circunscrito a um círculo de raio r é:

A) $\frac{5}{2} r^2$ C) $3\sqrt{3}\,\pi r^2$

B) $3\sqrt{3}\, r^2$ D) $\pi\sqrt{3}\, r^2$

E) NRA.

228. A razão entre as áreas dos triângulos eqüiláteros inscrito e circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{2}{5}$

229. A razão entre as áreas de um triângulo eqüilátero inscrito e de um hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{3}{8}$

230. Um dos lados oblíquos de um trapézio mede a e a distância do ponto médio do lado oposto a este lado é x. A área do trapézio é:

A) $\frac{ax}{2}$ C) $2ax$

B) ax D) indeterminado

E) NRA.

231. No quadrilátero qualquer ABCD, P é meio de $\overline{AD}$ e M é meio de BC. Se a área de ABCD é 18, a área do quadrilátero APCM é:

A) 6 C) 12

B) 9 D) indeterminado

E) NRA.

232. Considere um paralelogramo ABCD de lados $AB = 12$ e $BC = 4\sqrt{3}$. Se um dos ângulos desse paralelogramo mede 60°, calcule a área do losango inscrito de forma que uma diagonal seja formada pelos pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

A) 18 C) 30

B) 24 D) 36

E) NRA.

233. Considere um trapézio de bases a e b $(a > b)$ e altura h. Calcule a área do triângulo de base a formado pelos prolongamentos dos lados não paralelos.

A) $\frac{b^2h}{a-b}$ C) $\frac{a^2h}{2(a-b)}$

B) $\frac{a^2h}{a-b}$ D) $\frac{b^2h}{a+b}$

E) NRA.

234. Seja P um ponto interior a um triângulo ABC. Se os triângulos PAB, PBC e PCA são equivalentes, então P é o:

A) circuncentro C) baricentro

B) incentro D) ortocentro

E) NRA.

235. Um retângulo está inscrito em um círculo de raio igual a 6. Se um de seus lados mede 9, sua área mede:

A) $7\sqrt{7}$ C) $21\sqrt{7}$

B) $14\sqrt{7}$ D) $27\sqrt{7}$

E) NRA.

236. Um triângulo ABC tem área igual a 18. Pelo baricentro do triângulo traça-se uma paralela a $\overline{BC}$ que determina em $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ os pontos M e N. A área do triângulo AMN é:

A) 6 C) 8

B) 7 D) 9

E) 10

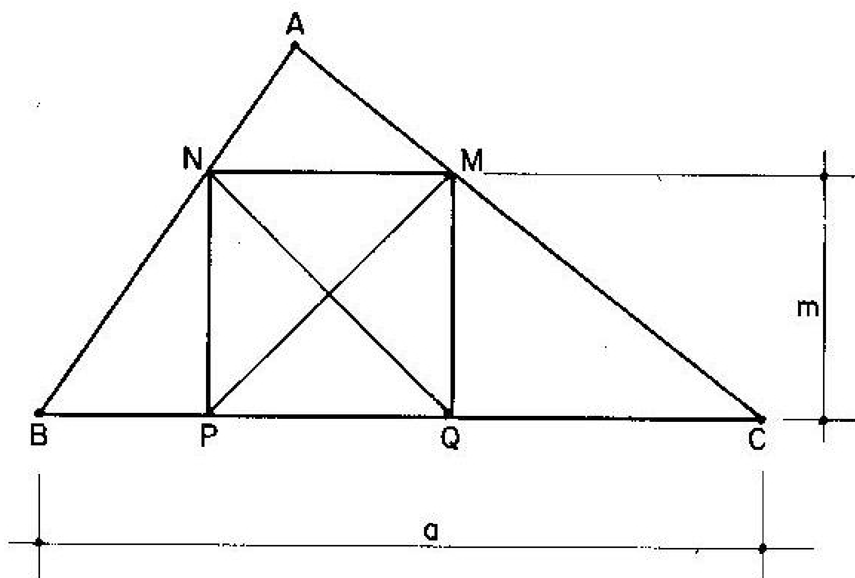
237. Um retângulo de área igual a 24 está inscrito em um triângulo de base 9 e altura 12. A maior dimensão que esse retângulo pode ter é:

A) 6 C) 8

B) 7,5 D) 9

E) NRA.

238. Na figura abaixo, MNPQ é um quadrado. A soma das áreas dos triângulos NQB e MPC é:



A) $m(a + m)$ C) $m(2a - m)$

B) $2m(a - m)$ D) $\frac{m}{2}(a + m)$

E) NRA.

239. Em um losango de área igual a 12, a distância entre dois lados opostos é 4. O perímetro desse losango é:

A) 24 C) 30

B) 26 D) 36

E) NRA.

ENUNCIADO PARA AS QUESTÕES 240 A 245

Nas figuras 240 a 245 o triângulo ABC tem área S, sendo $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ medianas. Calcule a área assinalada.

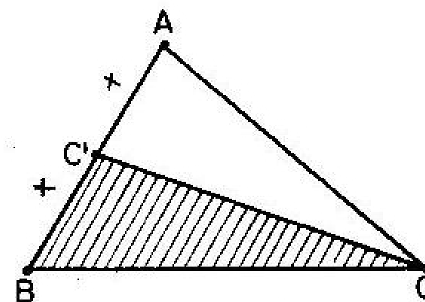
OPÇÕES PARA AS QUESTÕES 240 A 245

A) $\frac{S}{2}$ C) $\frac{S}{4}$

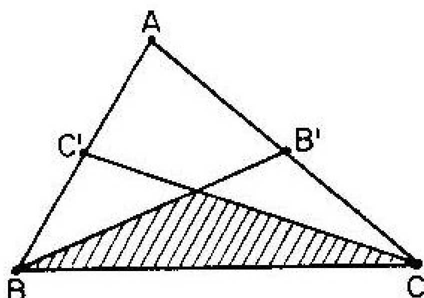
B) $\frac{S}{3}$ D) $\frac{S}{6}$

E) $\frac{S}{12}$

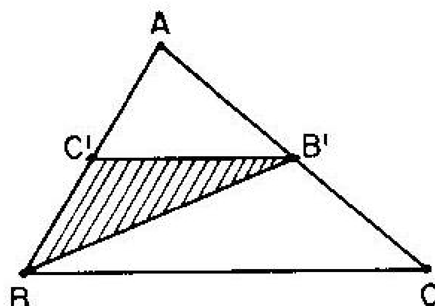
240.



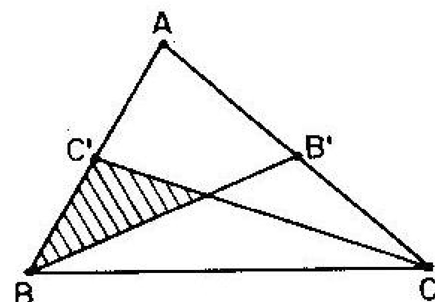
241.



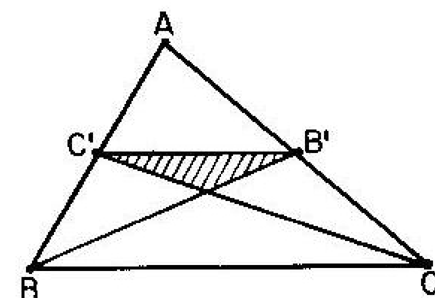
242.



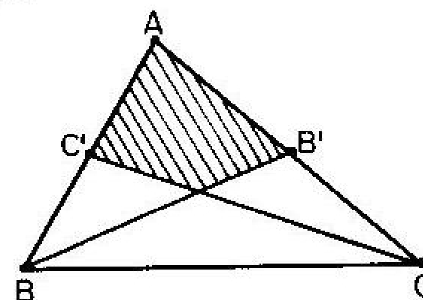
243.



244.



245.



246. Calcule a área assinalada.

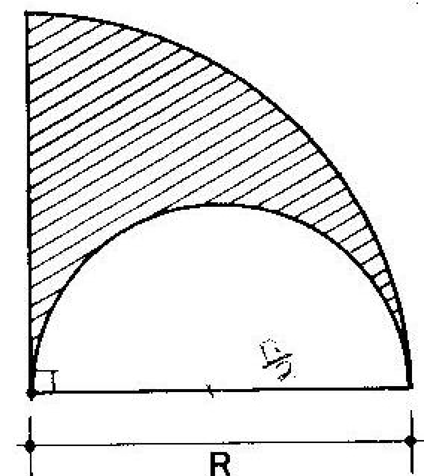
A) $\frac{\pi R^2}{4}$

B) $\frac{\pi R^2}{8}$

C) $\frac{\pi R^2}{16}$

D) $\frac{\pi R^2}{32}$

E) NRA.



247. Considere um triângulo eqüilátero de lado a onde foram traçados três círculos de raios $\frac{a}{2}$, com centro nos vértices. Calcule a área exterior aos círculos e interior ao triângulo eqüilátero.

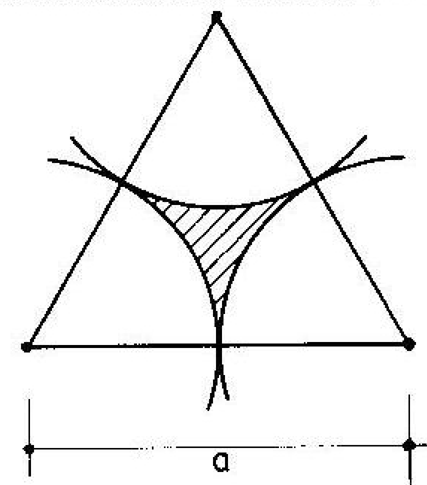
A) $\frac{a^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$

B) $\frac{a^2}{4}(\pi - \sqrt{3})$

C) $\frac{a^2}{4}(2\sqrt{3} - \pi)$

D) $\frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - \pi)$

E) NRA.



248. Considere um quadrado de lado a e a figura abaixo. Calcule a área assinalada.

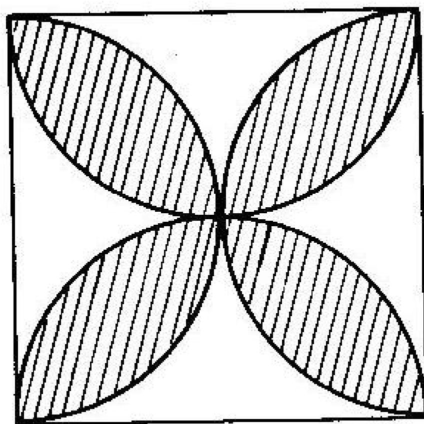
A) $a^2(\pi - 2)$

B) $\frac{a^2}{2}(2\pi - 1)$

C) $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$

D) $2a^2(\pi - 1)$

E) NRA.



249. Considere o quadrante de raio R da figura. Calcule a área assinalada.

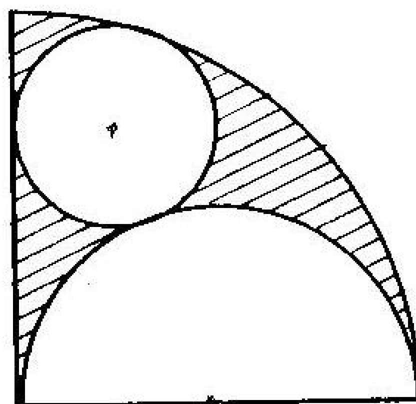
A) $\frac{\pi R^2}{8}$

B) $\frac{\pi R^2}{12}$

C) $\frac{5\pi R^2}{24}$

D) $\frac{\pi R^2}{16}$

E) NRA.



250. Na figura abaixo, $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{OB} = \widehat{OC} = 60°$. Calcule a área assinalada.

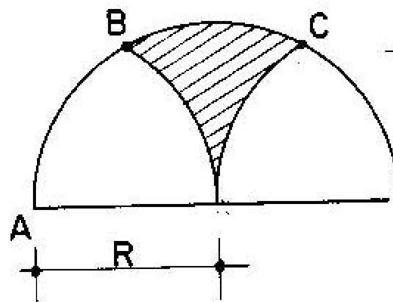
A) $\frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$

B) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$

C) $R^2(3\sqrt{3} - 2\pi)$

D) $R^2(\pi - \sqrt{3})$

E) NRA.



251. Calcule a área assinalada.

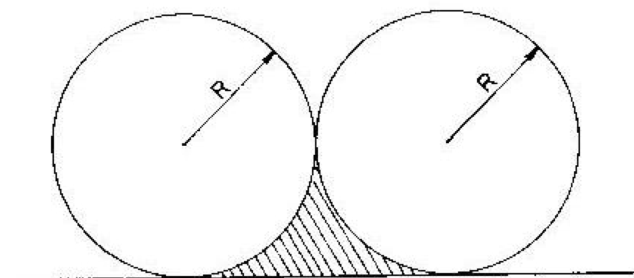
A) $R^2(\pi - 2)$

B) $\frac{R^2}{2}(\pi - 2)$

C) $\frac{R^2}{2}(4 - \pi)$

D) $\frac{R^2}{4}(4 - \pi)$

E) NRA.



252. (IME — 67) Calcule a área assinalada em função de r.

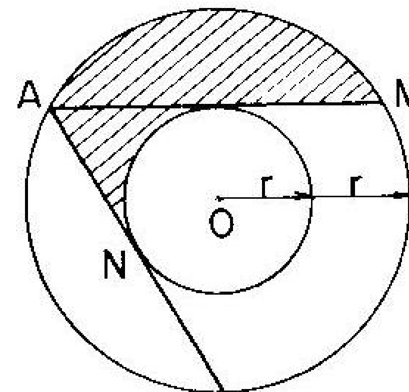
A) πr^2

B) $\frac{\pi r^2}{2}$

C) $\frac{2\pi r^2}{3}$

D) $2\pi r^2$

E) NRA.



253. Calcule a área S da figra em função do raio r do quadrante.

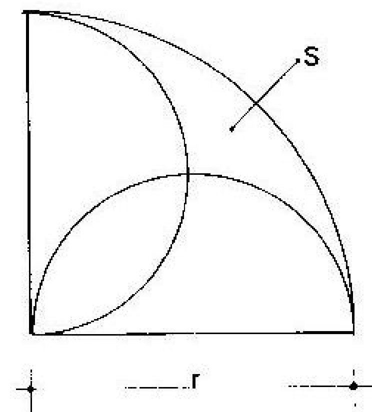
A) $r^2(\pi - 2)$

B) $\frac{r^2}{2}(\pi - 2)$

C) $\frac{r^2}{4}(\pi - 2)$

D) $\frac{r^2}{8}(\pi - 2)$

E) NRA.



254. (CICE — 70) Na figura abaixo, r é o raio do círculo maior e t é o comprimento da tangente AB comum aos dois círculos menores. Então, a área assinalada compreendida entre o círculo maior e os dois menores é:

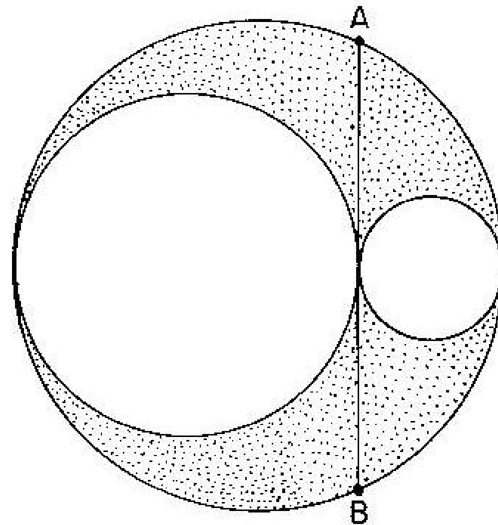
A) $\frac{\pi r^2}{8}$

B) $\frac{\pi r t}{8}$

C) $\frac{\pi t^2}{8}$

D) $\frac{\pi (t - r)^2}{8}$

E) nada disso.



255. (CICE — 70) Considere um triângulo eqüilátero DEF inscrito em um triângulo eqüilátero ABC de modo que os lados de DEF sejam respectivamente perpendiculares aos lados de ABC. Então, a área do triângulo DEF é:

A) $\frac{1}{4}$ da área de ABC

B) $\frac{1}{3}$ da área de ABC

C) $\frac{1}{5}$ da área de ABC

D) $\frac{1}{2}$ da área de ABC

E) nada disso.

256. (CICE — 68) A altura de um triângulo eqüilátero T tem comprimento igual ao lado de um triângulo eqüilátero S. Se a área de T é 30, a de S é:

A) 40

B) $40\sqrt{3}$

C) $30\sqrt{3}$

D) $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

E) NRA.

257. (CICE — 68) Seja p o perímetro e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. A área desse triângulo é:

A) $S = h \cdot p$

B) $S = \frac{1}{2} hp^2$

C) $S = h^2 + p^2$

D) $S = \frac{hp^2}{4(h + p)}$

E) $S = \frac{h^2 + p^2}{h + p}$

258. Calcule a área do círculo inscrito em um quadrante de raio r.

A) $r^2(\sqrt{2} - 1)$

B) $r^2(\sqrt{2} + 1)$

C) $r^2(3 - 2\sqrt{2})$

D) $r^2(3 + 2\sqrt{2})$

E) NRA.

259. Considere duas cordas paralelas de um semicírculo de raio 6 que determinam neste semicírculo arcos de 60° e 120°. Calcule a área da figura limitada por essas cordas e pelo semicírculo

A) 3π

B) 4π

C) $\frac{9}{2}\pi$

D) 6π

E) NRA.

260. Dado um triângulo de altura h, considere duas paralelas a base que o dividam em três partes equivalentes. Calcule em função de h as distâncias destas retas ao vértice do triângulo.

A) $\frac{1}{3}h$ e $\frac{2}{3}h$

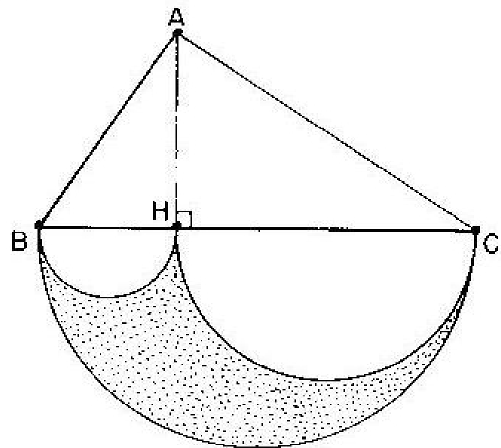
B) $\frac{h\sqrt{2}}{3}$ e $\frac{2h\sqrt{2}}{3}$

C) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{h\sqrt{6}}{3}$

E) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{h\sqrt{6}}{6}$

261. (CICE — JUL. — 70) Na figura abaixo, ABC é um triângulo retângulo e H é a projeção de A sobre a hipotenusa. Constroem-se semicírculos sobre $\overline{BC}$, $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$. A região assinalada tem área igual à:



A) do quadrado de lado $\overline{AH}$

B) do disco de diâmetro $\overline{AH}$

C) do disco de raio $\overline{AH}$

D) do triângulo ABC

E) NRA.

262. Na figura abaixo, I é o incentro do triângulo ABC e $\overline{DE}$, IF e IG são paralelos a $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Se AB = 8, AC = 10 e BC = 10, a razão entre as áreas dos triângulos ADE e IFG é:

A) 2

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{5}{2}$

D) $\frac{9}{2}$

E) $\frac{9}{4}$

263. (CICE — JUL. — 70) Se o ângulo A de um triângulo ABC é igual ao ângulo A' de A'B'C', então:

A) $\dfrac{\text{área de } ABC}{\text{área de } A'B'C'} = \dfrac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$

B) $\dfrac{\text{área de } ABC}{\text{área de } A'B'C'} = \dfrac{\text{sen } B \cdot \text{sen } C'}{\text{sen } B' \cdot \text{sen } C}$

C) $\dfrac{\text{área de } ABC}{\text{área de } A'B'C'} = \dfrac{AC^2}{A'C'^2}$

D) $\dfrac{\text{área de } ABC}{\text{área de } A'B'C'} = \dfrac{\text{perímetro de } ABC}{\text{perímetro de } A'B'C'}$

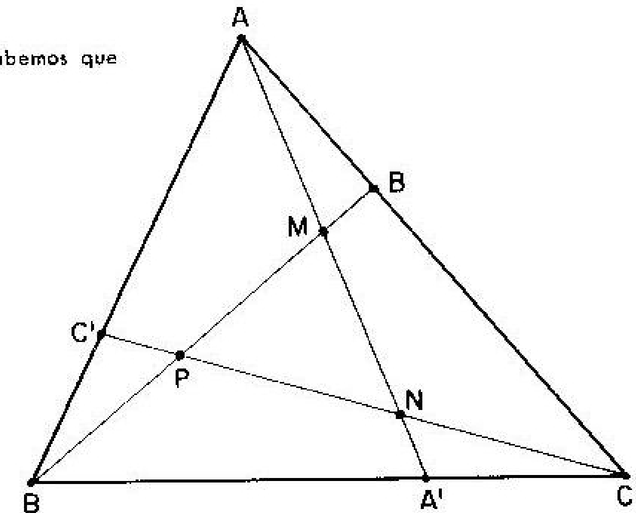
E) NRA.

264. Na figura abaixo, sabemos que

$CA' = \frac{1}{3}\, CB$

$AB' = \frac{1}{3}\, AB$

$BC' = \frac{1}{3}\, BA.$



A razão entre as áreas dos triângulos MNP e ABC é:

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{7}$

E) $\frac{1}{9}$

265. Considere um quadrilátero ABCD de área S. O quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD tem área:

A) $\frac{S}{2}$

B) $\frac{S}{3}$

C) $\frac{S}{4}$

D) indeterminado

E) NRA.

266. Considere o trapézio da figura. Então:

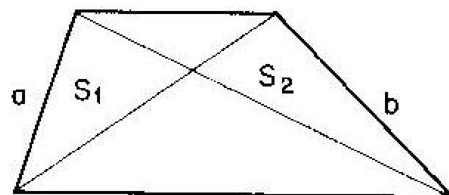
A) $S_1 < S_2$ se $a < b$

B) $S_1 > S_2$ se $a < b$

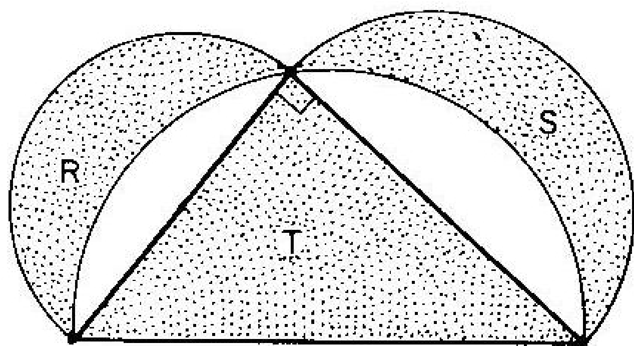
C) $S_1 = S_2$ se e só se $a = b$

D) $S = S_2$

E) NRA.

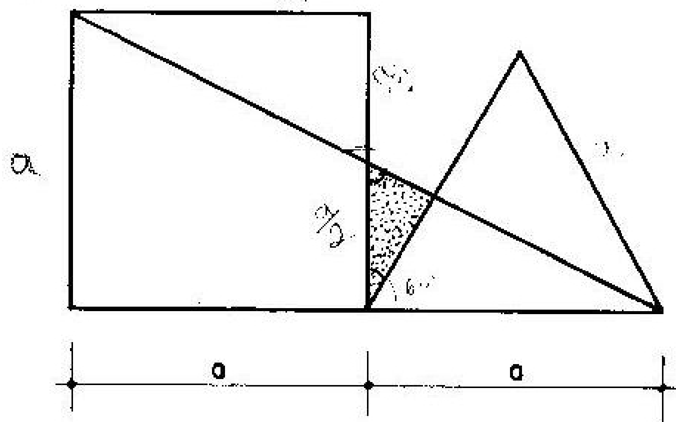


267. Constroem-se semicírculos sobre os lados de um triângulo retângulo, como mostra a figura. Prove que $R + S = T$.



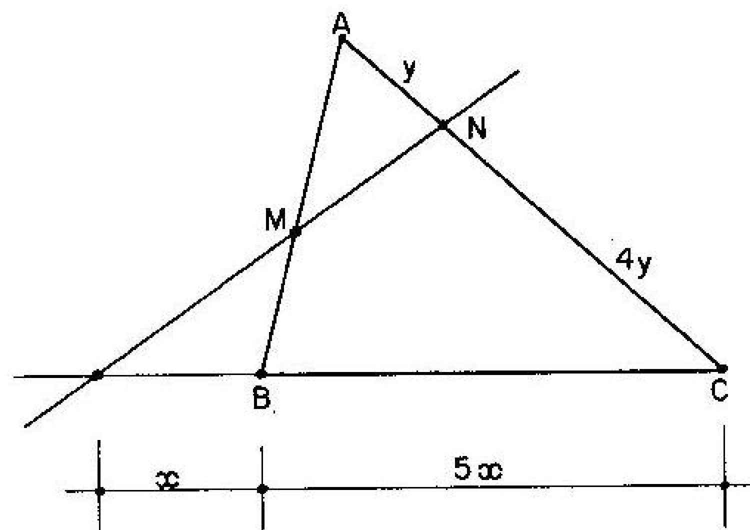
268. É dado um triângulo retângulo ABC de catetos $AB = a$ e $AC = 2a$. Por M, meio de $\overline{AC}$, traçam-se $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$ bissetriz de $N\widehat{M}C$. Calcule a área do triângulo MNP.

269. Considere um quadrado e um triângulo eqüilátero de mesmo lado a, como mostra a figura. Calcule a área assinalada.



270. Calcule, em função das bases a e b de um trapézio, o comprimento do segmento da paralela às bases que divide o trapézio em dois outros equivalentes.

271. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos AMN e ABC.



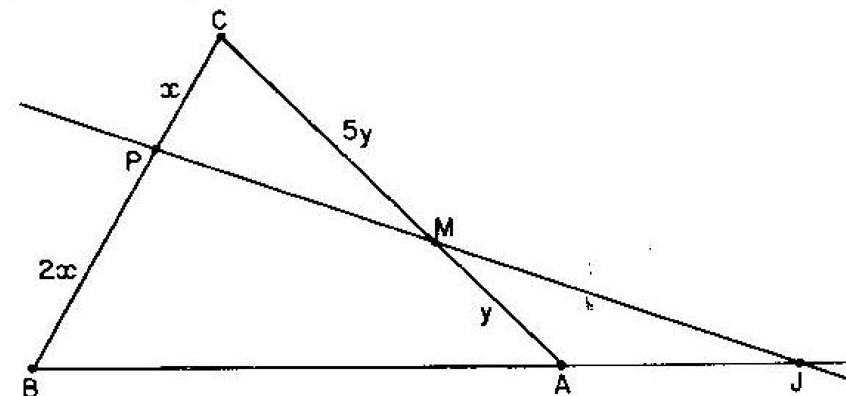
ENUNCIADO RELATIVO AOS PROBLEMAS 272, 273 e 274

Na figura abaixo, sendo S a área do triângulo ABC, calcule:

272. A área do triângulo CPM.

273. A área do quadrilátero PMA.

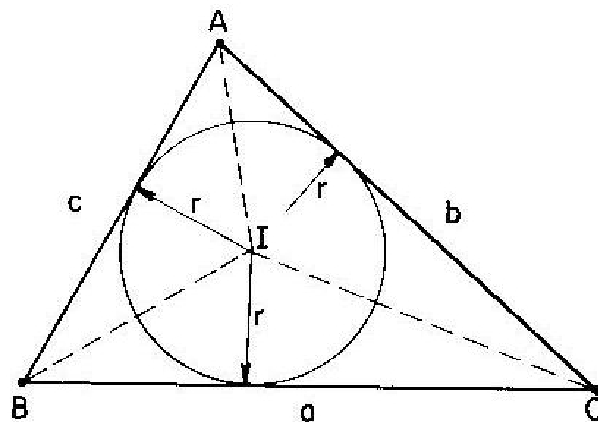
274. A área do triângulo SAM.



CAPÍTULO 7

O TRIÂNGULO E SEUS CÍRCULOS

7.1 — O CÍRCULO INSCRITO



Seja S a área do triângulo ABC, de lados a, b e c. Sendo I o incentro, temos

$$S = S(BCI) + S(ACI) + S(ABI) \implies$$

$$\implies S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \implies$$

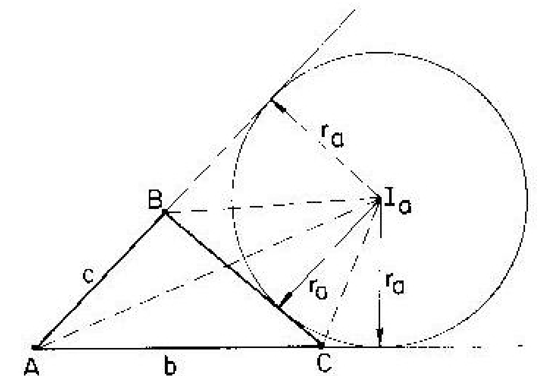
$$\implies S = \frac{(a+b+c)\,r}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{2p \cdot r}{2} \implies$$

$$\implies \boxed{S = pr}$$

7.2 — OS CÍRCULOS EXINSCRITOS

Consideremos o círculo exinscrito relativo ao lado a no triângulo ABC da figura.



Se S é a área do triângulo ABC, temos

$$S = S(ACI_a) + S(ABI_a) - S(BCI_a) \implies$$

$$\implies S = \frac{b \cdot r_a}{2} + \frac{c \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{(b + c - a) \cdot r_a}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{2(p - a) \cdot r_a}{2} \implies$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &= r_a (p - a) \\ S &= r_b (p - b) \\ S &= r_c (p - c) \end{aligned}}$$

e, analogamente,

7.3 — RELAÇÕES PRINCIPAIS

7.3.1 — Sabemos que

$$S = pr$$
$$S = r_a (p - a)$$
$$S = r_b (p - b)$$
$$S = r_c (p - c).$$

Multiplicando, temos

$$S^4 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot p \underbrace{(p-a)(p-b)(p-c)}_{S^2} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}$$

7.3.2 — Temos, ainda,

$$p - a = \frac{S}{r_a}$$

$$p - b = \frac{S}{r_b}$$

$$p - c = \frac{S}{r_c}. \qquad \text{Somando, temos}$$

$$3p - \underbrace{(a + b + c)}_{2p} = S\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) \implies$$

$$\implies \frac{p}{S} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. \quad \text{Mas } \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Logo, $$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.}$$

7.3.3 — O raio do círculo inscrito no triângulo pode ser calculado em função das alturas, como se segue:

$$2s = ah_a = bh_b = ch_c \implies$$

$$a = \frac{2s}{h_a} \qquad (1)$$

$$b = \frac{2s}{h_b} \qquad (2)$$

$$c = \frac{2s}{h_c}. \qquad \text{Somando,} \qquad (3)$$

$$2p = 2s\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right). \quad \text{Mas}$$

$$\text{como } \frac{p}{S} = \frac{1}{r}, \qquad \text{temos}$$

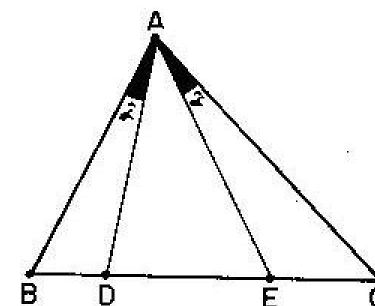
$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.}$$

7.3.4 — Também poderemos calcular os raios dos círculos exinscritos em função das alturas, bastando operar convenientemente as relações 7.3.3 — (1), (2) e (3), que forneceriam os seguintes resultados:

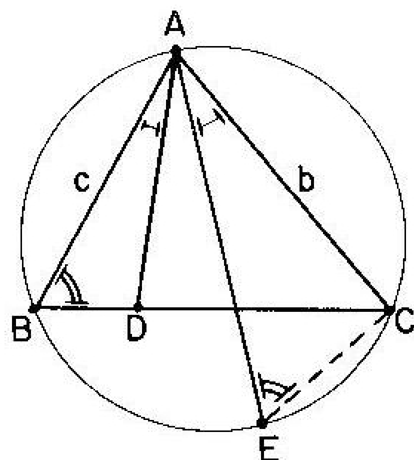
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{r_a} &= \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \\ \frac{1}{r_b} &= \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \\ \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \end{aligned}}$$

7.4 — CEVIANAS ISOGONAIS

Se duas cevianas partem do mesmo vértice e fazem mesmo ângulo com os lados que concorrem nesse vértice, são chamadas isogonais.



$\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ são isogonais



Sejam $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ duas cevianas isogonais no triângulo ABC. (D sobre a base e E no círculo circunscrito.)

Verificamos que os triângulos ADB e ACE são semelhantes, pois:

1) $B\hat{A}D = E\hat{A}C$ por construção

2) $A\hat{B}D = A\hat{E}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

Podemos, então, escrever

$$\frac{c}{AE} = \frac{AD}{b} \implies \boxed{bc = AD \cdot AE.}$$

7.5 — O CÍRCULO CIRCUNSCRITO

Considerando ainda a mesma figura do item anterior, vemos que os triângulos ADB e ACE são semelhantes independentemente do ângulo que AD e $\overline{AE}$ formam com $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Assim, nestes triângulos, se $\hat{D} = 90°$, então $\hat{C} = 90°$, sendo, portanto, $\overline{AD}$ a altura relativa ao lado a e $\overline{AE}$ o diâmetro do círculo circunscrito. Aplicando a propriedade anterior, temos

$$b \cdot c = h_a \cdot 2R.$$

Multiplicando ambos os termos por a, vem

$$abc = a \cdot h_a \cdot 2R, \text{ mas } a \cdot h_a = 2s.$$

Logo, $$\boxed{abc = 4\,RS.}$$

7.6 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

275. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo de lados 10, 17 e 21.

Solução

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ b = 17 \\ c = 21 \end{array}\right\} \implies p = 24$$

$$S = \sqrt{24\,(24 - 10)(24 - 17)(24 - 21)} =$$
$$= \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84$$
$$S = pr \implies$$
$$\implies 84 = 24 \cdot r \implies r = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$$

Resposta: $\frac{7}{2}$

276. Calcule os raios dos círculos exinscritos do triângulo do problema anterior.

Solução

Temos:	
$a = 10$	$S = r_a\,(p - a)$
	$84 = r_a\,(24 - 10) \implies r_a = 6$
$b = 17$	$S = r_b\,(p - b)$
$c = 21$	$84 = r_b\,(24 - 17) \implies r_b = 12$
$p = 24$	$S = r_c\,(p - c)$
$S = 84$	$84 = r_c\,(24 - 21) \implies r_c = 28$

Respostas: 6, 12 e 28.

277. Calcule o raio do círculo circunscrito ao triângulo de lados 10, 17 e 21.

1.ª Solução

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ b = 17 \\ c = 21 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad p = 24,\ S = 84 \text{ (já calculado; n.° 275)}$$

$$abc = 4\,RS$$

$$10 \cdot 17 \cdot 21 = 4\,R \cdot 84 \Longrightarrow R = \frac{85}{8}$$

2.ª Solução

Já tendo calculado nos problemas n.ºs 275 e 276 os raios dos círculos inscritos e exinscritos, poderemos calcular o raio do círculo circunscrito utilizando a relação dos cinco raios (Geometria I, n.° 8.7.3).

Temos:

$$r = \frac{7}{2}$$

$$r_a = 6$$

$$r_b = 12$$

$$r_c = 28.$$

Sabemos que $4R = r_a + r_b + r_c - r \Longrightarrow$

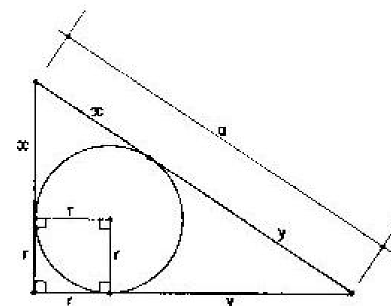
$$\Longrightarrow 4R = 6 + 12 + 28 - \frac{7}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow R = \frac{85}{8}$$

Resposta: $\dfrac{85}{8}$.

278. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo de perímetro 2p e hipotenusa a.

Solução



Considerando o triângulo da figura, temos

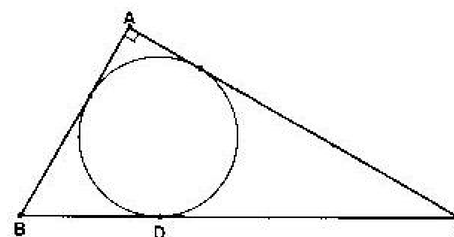
$$2x + 2y + 2r = 2p$$

$$\underbrace{x + y}_{a} + r = p \Longrightarrow r = p - a$$

Resposta: $r = p - a$.

279. Seja ABC um triângulo retângulo em A e seja D o ponto de contato do círculo inscrito com a hipotenusa. Prove que a área desse triângulo é BD · DC.

Solução



$S = pr$, mas $r = p - a$.

Logo, $S = p \cdot (p - a)$.

Como

$S^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$, concluímos que no triângulo retângulo $S = (p-b)(p-c)$. Mas $p-b = BD$ e $p-c = DC$. Então,

$$S = BD \cdot DC$$

280. (IME — 65) Calcule os lados de um triângulo conhecendo as alturas

$$h_a = \frac{1}{9}, \quad h_b = \frac{1}{7} \quad e \quad h_c = \frac{1}{4}.$$

1.ª Solução

De acordo com as relações 7.3.3 e 7.3.4, temos

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \Longrightarrow \frac{1}{r} = 9 + 7 + 4 \Longrightarrow r = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \Longrightarrow \frac{1}{r_a} = 7 + 4 - 9 \Longrightarrow r_a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \Longrightarrow \frac{1}{r_b} = 9 + 4 - 7 \Longrightarrow r_b = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \Longrightarrow \frac{1}{r_c} = 9 + 7 - 4 \Longrightarrow r_c = \frac{1}{12}.$$

Mas $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

Logo, $S = \sqrt{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{5}}{120}.$

Como $2S = ah_a = bh_b = ch_c$, teremos

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = a \cdot \frac{1}{9} \Longrightarrow a = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = b \cdot \frac{1}{7} \Longrightarrow b = \frac{7\sqrt{5}}{60}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = c \cdot \frac{1}{4} \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{15}.$$

2.ª Solução

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S \quad \text{ou}$$

$$\frac{a}{9} = \frac{b}{7} = \frac{c}{4} = 2S. \quad \text{Então,}$$

$$a = 18S$$
$$b = 14S$$
$$c = 8S$$

$$2p = 40S \Longrightarrow p = 20S.$$

Pela fórmula de Heron, temos

$$S^2 = 20S(2S)(6S)(12S) \Longrightarrow S = \frac{\sqrt{5}}{120}.$$

$$a = \frac{18\sqrt{5}}{120} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

$$b = \frac{14\sqrt{5}}{120} = \frac{7\sqrt{5}}{60}$$

$$c = \frac{8\sqrt{5}}{120} = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

Resposta: $\frac{3\sqrt{5}}{20}$, $\frac{7\sqrt{5}}{60}$ e $\frac{\sqrt{5}}{15}$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

281. O raio do círculo inscrito em um triângulo de lados 5, 7 e 8 é:

A) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$
B) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$
E) NRA.

282. Os lados de um triângulo medem 5, 7 e 8. O maior círculo exinscrito tem raio igual a:

A) $10\sqrt{3}$

B) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

C) $5\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$

E) NRA.

283. Os lados de um triângulo medem 5, 7 e 8. O menor círculo exinscrito tem raio igual a:

A) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

B) $5\sqrt{3}$

C) $\sqrt{3}$

D) duas vezes o raio do círculo nele inscrito

E) NRA.

284. Em um triângulo, $a = 4$ e $b + c = 6$. A razão $\frac{r}{r_a}$ é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{2}{5}$

285. Em um triângulo, $a = 7$, $b = 10$ e $c = 11$. Então, $\frac{r_a}{r_b}$ vale:

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{3}{7}$

E) $\frac{4}{7}$

286. Em um triângulo, o produto dos raios dos círculos exinscritos é igual a:

A) p^2r

B) $2p^2r$

C) pr^2

D) $2pr^2$

E) NRA.

p = semiperímetro

r = raio do círculo inscrito.

287. (CICE — 70) A soma dos inversos das alturas de qualquer triângulo é igual:

A) à soma dos inversos dos lados

B) ao inverso do raio do círculo inscrito

C) ao inverso do raio do círculo circunscrito

D) à razão do raio do círculo inscrito para o quadrado do raio do círculo circunscrito

E) nenhum destes.

288. Em um triângulo de lados a, b e c o produto dos raios dos círculos inscrito e circunscrito é dado por:

$$Rr = k\frac{abc}{a+b+c}, \text{ onde } k \text{ vale:}$$

A) 1

B) 2

C) 4

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{4}$

289. Calcule o raio do círculo circunscrito a um triângulo isósceles ABC onde $AB = AC = b$ e a altura $AH = h$.

A) $\frac{b^2}{h}$

B) $\frac{b^2}{2h}$

C) $\frac{2b^2}{h}$

D) $\frac{b(b+h)}{h}$

E) NRA.

290. Em um triângulo ABC a soma das alturas $h_a + h_b + h_c$ é igual a:

A) $\dfrac{ab + bc + ca}{2R}$ C) $\dfrac{abc}{4R^2}$

B) $\dfrac{ab + bc + ca}{4R}$ D) $\dfrac{abc}{2R^2}$

E) NRA.

291. Em um triângulo,

$$\frac{h_a}{bc} + \frac{h_b}{ac} + \frac{h_c}{ab}$$

é igual a:

A) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

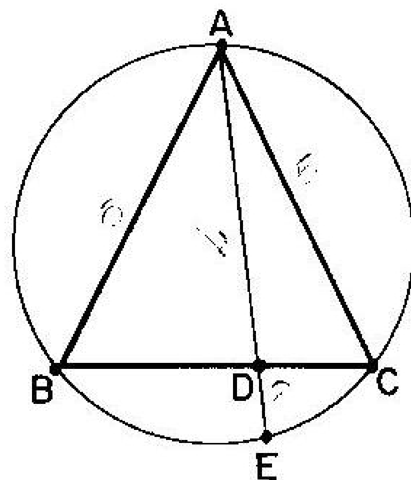
B) $\dfrac{1}{R}$ R = raio do círculo circunscrito.

C) $\dfrac{3}{4R}$

D) $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

E) NRA.

292. Na figura ao lado, AB = AC = 5 e AD = 4. O prolongamento da ceviana $\overline{AD}$ encontra o círculo circunscrito ao triângulo ABC em E. Então, DE mede:



A) 2   C) 2,5

B) 2,25   D) indeterminado

E) NRA.

293. Calcule a área de um triângulo sabendo que os raios dos círculos exinscritos medem 3, 4 e 6.

A) $\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{6}$

B) $2\sqrt{6}$ D) $8\sqrt{6}$

E) NRA.

294. O raio do círculo circunscrito ao triângulo cujos lados medem 5, 7 e 8 mede:

A) $\dfrac{7}{2}\sqrt{3}$ C) $\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$

B) $\dfrac{7}{3}\sqrt{3}$ D) $\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$

E) NRA.

295. Considere dois círculos de centros A e B e raios a e b, respectivamente, estando B sobre o círculo de centro A. Se $\overline{MN}$ é uma corda do círculo de centro A, tangente ao círculo de centro B, o produto BM · BN vale:

A) $\dfrac{ab}{2}$ C) 2ab

B) ab   D) a^2

E) b^2.

296. Um triângulo ABC de lados AB = 6, AC = 4 e BC = 5 está inscrito num círculo. A bissetriz AD encontra o círculo circunscrito em E. Então, DE mede:

A) 1   C) $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{2}$ D) 2

E) NRA.

297. Um triângulo ABC de lados AB = 8 e AC = 12 está inscrito em um círculo de raio igual a 8. A altura relativa ao lado a desse triângulo mede:

A) 3   C) 6

B) 4   D) 8

E) 9.

298. Seja S a área de um triângulo ABC e 2p seu perímetro. Então

$$\text{tg}\,\frac{\hat{A}}{2} \cdot \text{tg}\,\frac{\hat{B}}{2} \cdot \text{tg}\,\frac{\hat{C}}{2}$$

é igual a:

A) $\dfrac{S}{p^2}$ C) $\dfrac{2p^2}{S}$

B) $\dfrac{p^2}{S}$ D) $\dfrac{S}{4p^2}$

E) NRA.

299. Em um triângulo ABC, $\cos\dfrac{\hat{A}}{2}\cdot\cos\dfrac{\hat{B}}{2}\cdot\cos\dfrac{\hat{C}}{2}$ é igual a:

A) $\dfrac{p}{R}$

B) $\dfrac{2p}{R}$

C) $\dfrac{p}{2R}$

D) $\dfrac{p}{4R}$

E) NRA.

p = semiperímetro

R = raio do círculo circunscrito.

300. Em um triângulo ABC, $\text{sen}\dfrac{\hat{A}}{2}\cdot\text{sen}\dfrac{\hat{B}}{2}\cdot\text{sen}\dfrac{\hat{C}}{2}$ é igual a:

A) $\dfrac{r}{R}$

B) $\dfrac{2r}{R}$

C) $\dfrac{r}{2R}$

D) $\dfrac{r}{4R}$

E) NRA.

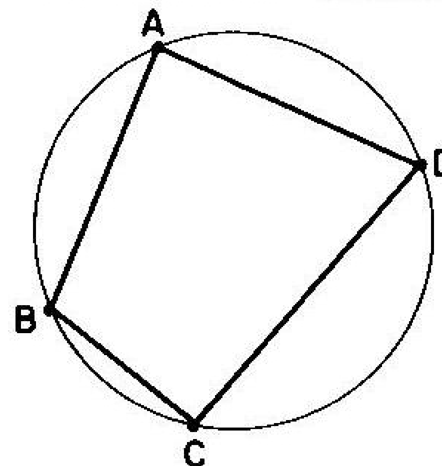
r = raio do círculo inscrito

R = raio do círculo circunscrito.

CAPÍTULO 8

OS QUADRILÁTEROS

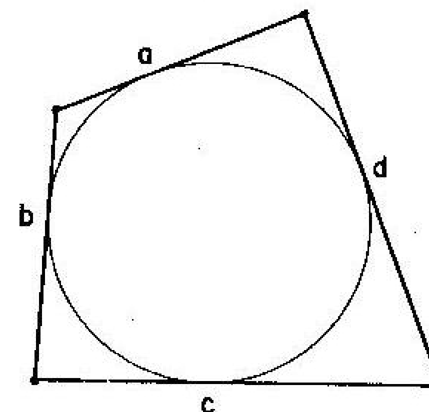
8.1 — QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL



Os quatro vértices pertencem a um mesmo círculo.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{O}=180°}$

8.2 — QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL



Os quatro lados são tangentes a um mesmo círculo.

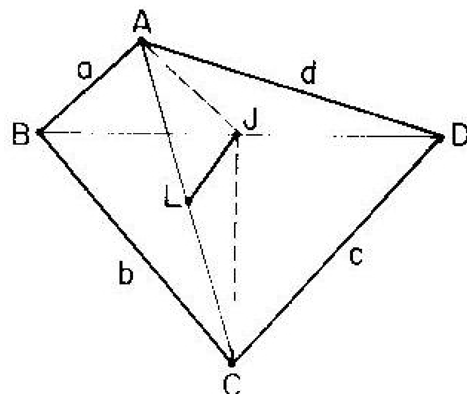
$\Longrightarrow$ $\boxed{a + b = c + d}$

8.3 — RELAÇÃO DE EULER (quadrilátero qualquer)

Num quadrilátero qualquer, a soma dos quadrados dos quatro lados é igual à soma dos quadrados das diagonais mais quatro vezes o quadrado da mediana de Euler do quadrilátero.

Demonstração

Consideremos um quadrilátero qualquer ABCD, sendo



lados $\begin{cases} AB = a \\ BC = b \\ CD = c \\ DA = d \end{cases}$

diagonais $\begin{cases} AC = P \\ BD = q \end{cases}$

mediana de Euler* $JL = m$.

Como J é médio de BD, $\overline{AJ}$ e $\overline{CJ}$ são medianas nos triângulos ABD e CBD. Logo,

$$4\,AJ^2 = 2\,(a^2 + d^2) - q^2$$

$$4\,CJ^2 = 2\,(b^2 + c^2) - q^2$$

Somando e dividindo por 2, temos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - q^2 = 2\,(AJ^2 + CJ)^2. \qquad (1)$$

Mas, no triângulo AJC, $JL = m$ é mediana. Logo,

$$4\,m^2 = 2\,(AJ^2 + CJ^2) - p^2 \qquad \text{ou}$$

$$2\,(AJ^2 + CJ^2) = 4\,m^2 + p^2$$

Substituindo (2) em (1), teremos

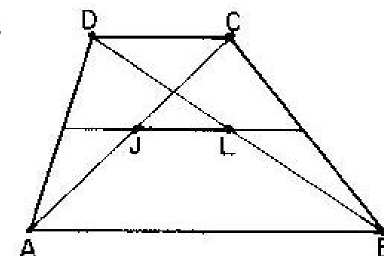
$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4\,m^2}$$

---

* A mediana de Euler é o segmento que une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero.

8.4 — APLICAÇÃO NOS TRAPÉZIOS

8.4.1 — Trapézio escaleno



Consideremos um trapézio ABCD onde temos

bases $\begin{cases} AB = b \\ CD = b' \end{cases}$

lados não paralelos $\begin{cases} AD = a \\ BC = c \end{cases}$

diagonais $\begin{cases} AC = p \\ BD = q \end{cases}$

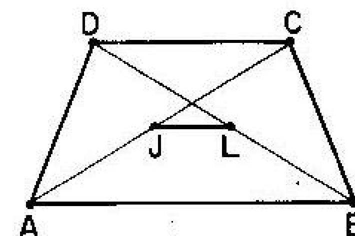
mediana de Euler $JL = m = \dfrac{b - b'}{2}$

Substituindo na relação encontrada em 9.3, teremos

$$\boxed{2bb' + a^2 + c^2 = p^2 + q^2}$$

8.4.2 — Trapézio isósceles

No trapézio isósceles ABCD, devemos considerar



$AD = CB = a$

$AC = BD = p$

Assim, a relação anterior toma a forma

$$\boxed{a^2 + bb' = p^2}$$

8.5 — APLICAÇÃO NO PARALELOGRAMO

Consideremos um paralelogramo ABCD onde

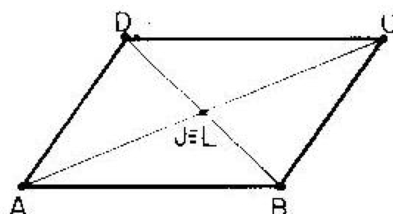
$AB = CD = a$

$BD = BC = b$

$AC = p$

$AD = q$

$JL = O.$



Substituindo na relação de Euler, temos

$$\boxed{2\,(a^2 + b^2) = p^2 + q^2}$$

8.6 — RELAÇÕES EM QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

8.6.1 — Relação de Ptolomeu

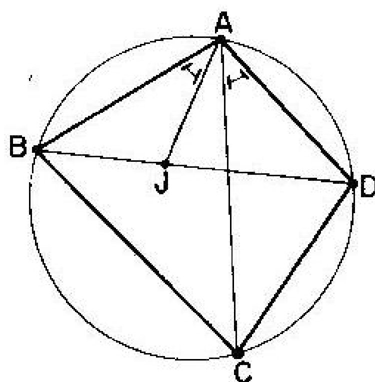
Num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Demonstração

Consideremos o quadrilátero inscritível ABCD da figura, sendo

lados $\begin{cases} AB = a \\ BC = b \\ CD = c \\ DA = d \end{cases}$

diagonais $\begin{cases} AC = p \\ BD = q. \end{cases}$



Consideremos ainda $\overline{AJ}$ isogonal de $\overline{AC}$ em relação a $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Assim, $B\widehat{A}J = C\widehat{A}D$.

Da semelhança dos triângulos AJD e ABC, temos

$$\frac{JD}{b} = \frac{d}{p} \Longrightarrow JD \cdot p = bd. \qquad (1)$$

Da semelhança dos triângulos AJB e ADC, temos

$$\frac{BJ}{c} = \frac{a}{p} \Longrightarrow BJ \cdot p = ac \qquad (2)$$

Somando (1) e (2), temos

$$p\,(BJ + JD) = ac + bd \Longrightarrow$$

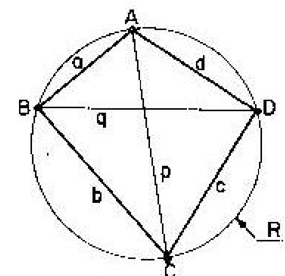
$$\Longrightarrow \boxed{pq = ac + bd}$$

8.6.2 — Relação de Hiparco

A razão das diagonais de um quadrilátero é a razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais.

Demonstração

Consideremos o quadrilátero inscritível ABCD, da figura, e notemos que sua área é equivalente à soma de dois triângulos com um lado comum $\overline{AC}$ ou com um lado comum $\overline{BD}$, o que permite escrever



$$S\,(BAC) + S\,(DAC) = S\,(ABD) + S\,(CBD)$$

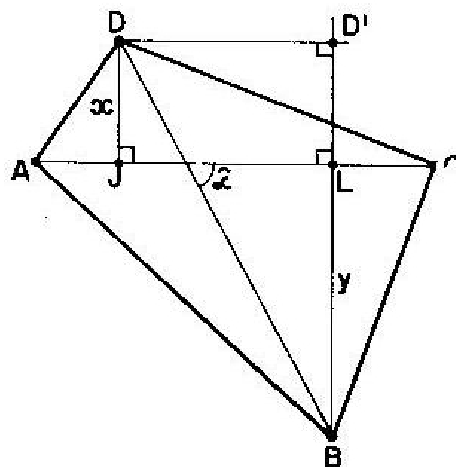
Como os quatro triângulos possuem o mesmo círculo circunscrito e, de acordo com a relação 8.5, temos

$$\frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} = \frac{adq}{4R} + \frac{bcq}{4R} \implies$$

$$\implies p(ab + cd) = q(ad + bc) \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}}$$

8.7 — ÁREA DO QUADRILÁTERO CONVEXO



Seja ABCD um quadrilátero convexo qualquer de diagonais AC = p e BD = q, sendo $\hat{\alpha}$ o ângulo formado por elas.

Sendo S a área do quadrilátero ABCD, podemos escrever

$$S = S(ACD) + S(ABC).$$

Sendo DJ = x e BL = y perpendiculares a $\overline{AC}$, teremos

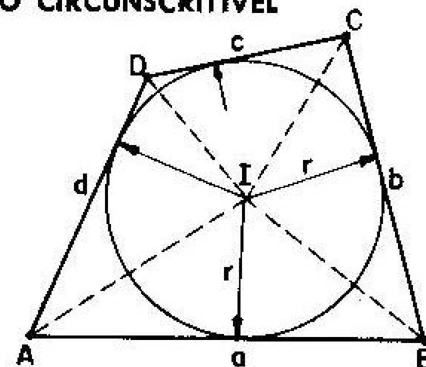
$$S = \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}py \implies$$

$$\implies S = \frac{1}{2}p(x + y).$$

Porém, $x + y = BD' = q \operatorname{sen} \hat{\alpha}$. Logo,

$$\boxed{S = \frac{1}{2} pq \operatorname{sen} \hat{\alpha}}$$

8.8 — ÁREA DO QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL



Consideremos o quadrilátero circunscritível ABCD da figura. Sejam a, b, c, d os comprimentos de seus lados, r o raio do círculo inscrito e I o incentro. Se S é área do quadrilátero e p o semiperímetro, temos

$$S = S(AIB) + S(BIC) + S(CID) + S(DIA) \implies$$

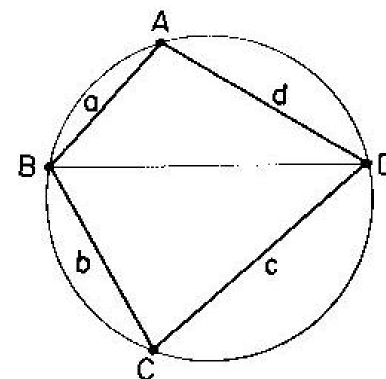
$$\implies S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{(a + b + c + d)}{2} \cdot r \implies$$

$$\implies S = \frac{2p}{2} \cdot r \implies$$

$$\implies \boxed{S = pr}$$

8.9 — ÁREA DO QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL



Consideremos o quadrilátero ABCD da figura.

A Lei dos co-senos nos triângulos ABD e CBD fornece

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad \cos \hat{A}$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \hat{C}$$

Mas, como $\hat{A} + \hat{C} = 180°$, $\cos \hat{C} = -\cos \hat{A}$.

Igualando as expressões, temos

$$b^2 + c^2 + 2\,bc\cos\widehat{A} = a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\widehat{A} \implies$$

$$\implies 2\,(ad + bc)\cos\widehat{A} = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \implies$$

$$\implies \cos\widehat{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(ad + bc)}.$$

Calculemos agora $1 + \cos\widehat{A}$.

$$1 + \cos\widehat{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + 2\,ad + 2\,bc}{2\,(ad + bc)}$$

Mas $1 + \cos\widehat{A} = 2\,\text{sen}^2\,\frac{\widehat{A}}{2}$. Então,

$$2\,\text{sen}^2\,\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2\,(ad + bc)} \implies$$

$$\implies 2\,\text{sen}^2\,\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(a + d + b - c)(a + d + c - b)}{2\,(ad + bc)}.$$

Sendo 2 p o perímetro do quadrilátero, temos

$$2\,\text{sen}^2\,\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{2\,(p - c)\cdot 2\,(p - b)}{2\,(ad + bc)} \implies$$

$$\implies \text{sen}^2\,\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(p - c)(p - b)}{(ad + bc)}$$ e, analogamente,

como $1 - \cos\widehat{A} = 2\cos^2\frac{\widehat{A}}{2}$, encontraríamos

$$\cos^2\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(p - a)(p - d)}{ad + bc}.$$

A área S do quadrilátero é a soma das áreas dos triângulos ADB e CDB.

$$S = \frac{ad\,\text{sen}\,\widehat{A}}{2} + \frac{bc\,\text{sen}\,\widehat{C}}{2}.$$

Mas $\text{sen}\,\widehat{A} = \text{sen}\,\widehat{C}$, pois $\widehat{A} + \widehat{C} = 150°$. Logo,

$$S = \frac{ad + bc}{2}\cdot\text{sen}\,\widehat{A} \implies$$

$$\implies S = \frac{ad + bc}{2}\cdot 2\,\text{sen}\,\frac{\widehat{A}}{2}\cdot\cos\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Quadrando,

$$S^2 = (ad + bc)^2\,\text{sen}^2\,\frac{\widehat{A}}{2}\cdot\cos^2\frac{\widehat{A}}{2}$$

$$S^2 = (ad + bc)^2\,\frac{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ad + bc)^2} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.}$$

8.10 — ÁREA DO QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL E CIRCUNSCRITÍVEL

Em um quadrilátero inscritível,

$$a + c = b + d = p.$$

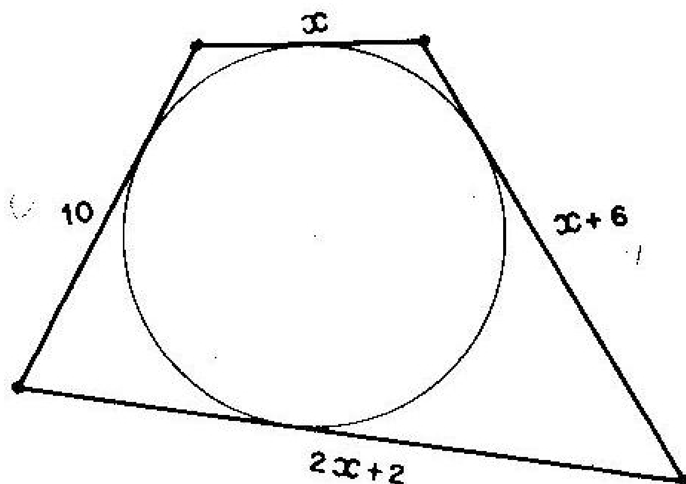
Teremos, então,

$$S = \sqrt{(a + c - a)(b + d - b)(a + c - c)(b + d - d)} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \sqrt{abcd}.}$$

8.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

301. Calcule x no quadrilátero da figura.



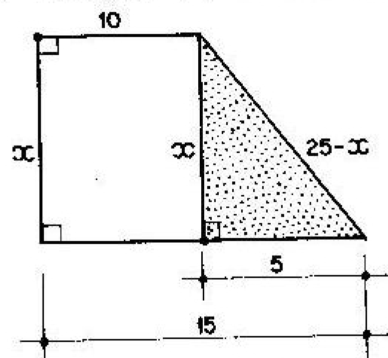
Solução

Porque o quadrilátero é circunscritível,

$$10 + x + 6 = x + 2x + 2 \implies x = 7$$

Resposta: 7

302. Calcule a altura de um trapézio retângulo circunscritível de bases 15 e 10.



Solução

$$(25 - x)^2 = x^2 + 5^2 \implies$$

$$\implies x = 12$$

Resposta: 12

Dividindo membro a membro,

$$pq \cdot \frac{q}{p} = (ac + bd)\,\frac{ad + bc}{ab + cd} \implies$$

$$\implies q = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)}}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

305. Calcule a menor diagonal do quadrilátero inscritível ABCD cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ medem respectivamente 1, 2, 2 e 3.

A) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$

B) 2 D) $\sqrt{7}$

E) NRA.

306. A mediana de Euler do quadrilátero do problema anterior tem comprimento igual a:

A) $\sqrt{\frac{69}{7}}$ C) $\sqrt{\frac{27}{7}}$

B) $\sqrt{\frac{52}{7}}$ D) $\sqrt{\frac{13}{7}}$

E) NRA.

307. O raio do círculo circunscrito ao quadrilátero do problema 305 mede:

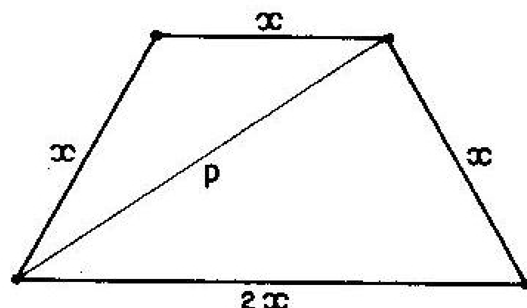
A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{14}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ D) $\sqrt{\frac{14}{3}}$

E) NRA.

303. Calcule o comprimento das diagonais do trapézio isósceles da figura.

Solução



De 8.4.2, temos

$$x^2 + x \cdot 2x = p^2 \Longrightarrow p = x\sqrt{3}$$

Resposta: $x\sqrt{3}$.

304. Calcule as diagonais de um quadrilátero inscritível em função dos lados.

Solução

Conhecemos as relações de Ptolomeu e Hiparco (8.6.1 e 8.6.2)

$$pq = ac + bd$$

$$\frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

Multiplicando membro a membro,

$$pq \cdot \frac{p}{q} = (ac + bd)\,\frac{ab + cd}{ad + bc} \Longrightarrow$$

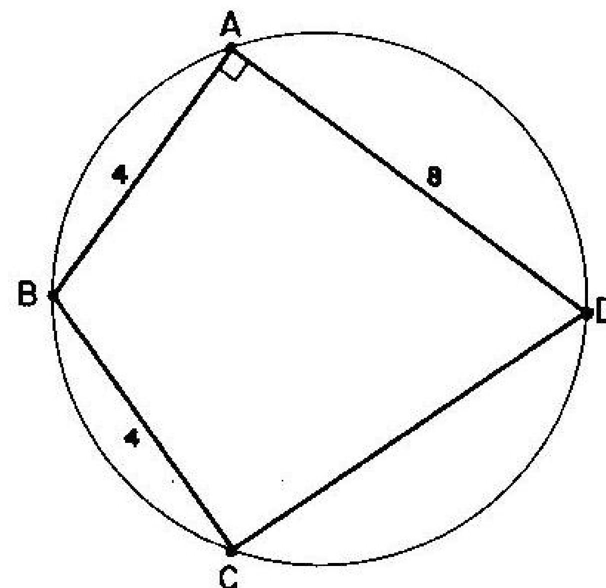
$$\Longrightarrow \quad p = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

308. Calcule o comprimento do segmento que une os pontos médios das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um trapézio, conhecendo seus lados: $AB = 14$, $BC = 7$, $CD = 4$ e $DA = 5$.

A) 2
B) $2\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$
E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 309 A 312

No quadrilátero inscritível da figura, $AB = BC = 4$, $AD = 8$ e $\hat{A} = 90°$.



309. A área desse quadrilátero mede:

A) 32
B) 28
C) 24
D) 16
E) NRA.

310. O raio do círculo inscrito nesse quadrilátero mede:

A) $\frac{12}{5}$
B) $\frac{16}{3}$
C) $\frac{8}{3}$
D) $\frac{9}{4}$
E) NRA.

311. O raio do círculo circunscrito a esse quadrilátero mede:

A) $\sqrt{20}$ C) $\sqrt{58}$

B) $2\sqrt{20}$ D) $\sqrt{65}$

E) NRA.

312. A menor diagonal desse quadrilátero mede:

A) $\sqrt{20}$ C) $\frac{4}{5}\sqrt{20}$

B) $\frac{5}{4}\sqrt{20}$ D) $\frac{2}{3}\sqrt{20}$

E) NRA.

313. Calcule a área do quadrilátero ABCD inscritível cujos lados medem: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$ e $DA = 7$.

A) $\sqrt{15}$ C) $2\sqrt{15}$

B) $\sqrt{30}$ D) $2\sqrt{30}$

E) NRA.

314. (CICE — 70) Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas a e b, e uma das diagonais tem por medida c. Então, a medida da outra diagonal é:

A) $\sqrt{3(a^2 + b^2) - 2c^2}$

B) $\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$

C) $\sqrt{4(a^2 + b^2) - 3c^2}$

D) $\sqrt{2ab - c}$

E) nada disso.

315. (IME — 66) Em um círculo de $10\sqrt{2}$ de diâmetro temos duas cordas medindo 2 e 10. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

A) 8 C) $8\sqrt{2}$

B) $6\sqrt{2}$ D) $10\sqrt{2}$

E) NRA.

316. Em um círculo de $10\sqrt{2}$ de diâmetro temos duas cordas medindo 2 e 10. Achar a corda do arco diferença dos arcos das cordas anteriores.

A) 4 C) $3\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$.

317. O quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados de um quadrilátero que possui diagonais perpendiculares:

A) pode ser qualquer quadrilátero

B) é um retângulo

C) é um losango

D) é um quadrado

E) NRA.

318. Num quadrilátero inscritível ABCD, $AD = DC$. Se as diagonais desse quadrilátero cortam-se em I e se $AI = 6$, $CI = 4$ e $BI = 8$, o maior lado desse quadrilátero mede:

A) $\sqrt{33}$ C) $3\sqrt{33}$

B) $2\sqrt{33}$ D) $4\sqrt{7}$

E) NRA.

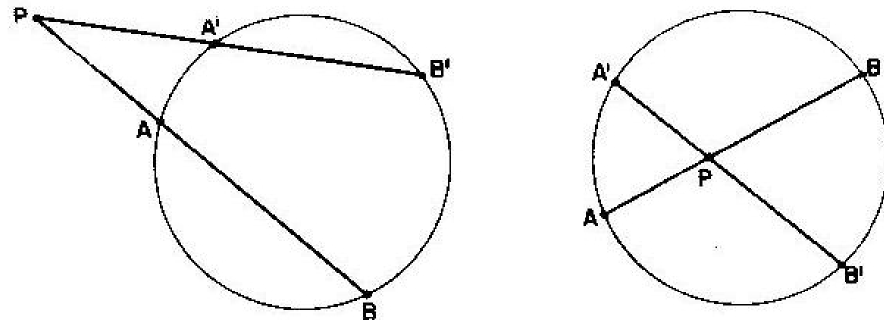
CAPÍTULO 9

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

9.1 — TEOREMA

Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ de um círculo concorrem em um ponto P interior ou exterior a esse círculo, o produto PA · PB é igual a PA' · PB'.

Demonstração



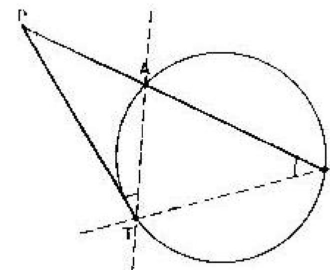
Realmente, porque $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são antiparalelas em relação a $\overline{PA}$ e $\overline{PA'}$, efetivamente podemos escrever

$$\boxed{PA \cdot PB = PA' \cdot PB'} \qquad (V.\ 3 \cdot 10 \cdot 2 — II)$$

9.2 — TEOREMA

Se P é um ponto exterior a um círculo, $\overline{PAB}$ uma secante qualquer e $\overline{Pr}$ o segmento da tangente traçada deste ponto ao círculo, então $PT^2 = PA \cdot PB$.

Demonstração



Da semelhança dos triângulos PAT e PTB, ou simplesmente notando que $\overline{TA}$ e $\overline{TB}$ ainda são antiparalelas em relação a $\overline{PT}$ e $\overline{PB}$, de acordo com a relação encontrada em 3.10.4 podemos escrever

$$\boxed{PT^2 = PA \cdot PB.}$$

9.3 — DEFINIÇÃO

Se por um ponto P traçarmos uma reta que corte um círculo (O, R) nos pontos A e B, chama-se POTÊNCIA do ponto P em relação ao círculo ao produto escalar $\overrightarrow{PA}$ — $\overrightarrow{PB}$* e escreve-se

$$\boxed{Pot_{(o)} P = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}$$

1.° caso — P é exterior ao círculo.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB \implies$$

$$\implies \boxed{Pot_{(o)} P = PA \cdot PB}$$

2.° caso — P é interior ao círculo.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB \cdot \cos 180° \implies$$

$$\implies \boxed{Pot_{(o)} P = - PA \cdot PB}$$

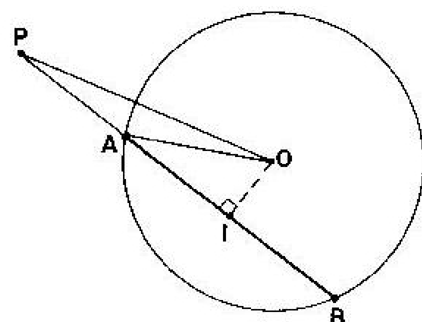
* O produto escalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ é definido como sendo igual a $PA \cdot PB \cdot \cos \alpha$, sendo α o ângulo que $\overrightarrow{PA}$ forma com $\overrightarrow{PB}$.

Pelas propriedades anteriores, verificamos que o produto PA · PB é sempre constante para qualquer reta que contenha P, sendo função apenas da sua posição em relação ao círculo.

9.4 — TEOREMA

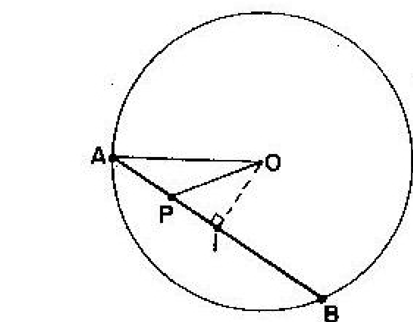
A potência de um ponto P em relação a um círculo pode ser calculada por $d^2 - R^2$, sendo d a distância de P ao centro do círculo e R o raio desse círculo.

Demonstração



1.° caso — P é exterior.

$$PA \cdot PB = (PI - IA)(PI + IA) =$$
$$= PI^2 - IA^2 =$$
$$= (PO^2 - OI^2) -$$
$$- (OA^2 - OI^2) =$$
$$= PO^2 - OA^2 =$$
$$= d^2 - R^2.$$



2.° caso — P é interior.

$$- PA \cdot PB = -(IA - PI)(PI + IA)^* =$$
$$= (PI - IA)(PI + IA) =$$
$$= PI^2 - IA^2 =$$
$$= (PO^2 - OI^2) -$$
$$-(OA^2 - OI^2) =$$
$$= PO^2 - OA^2 =$$
$$= d^2 - R^2.$$

Concluímos, portanto, $\boxed{Pot_{(o)} P = d^2 - R^2}$

* Segmentos não orientados.

Observemos que:

1) Se P é exterior ao círculo, $d > R \Longrightarrow Pot\ P > 0$.

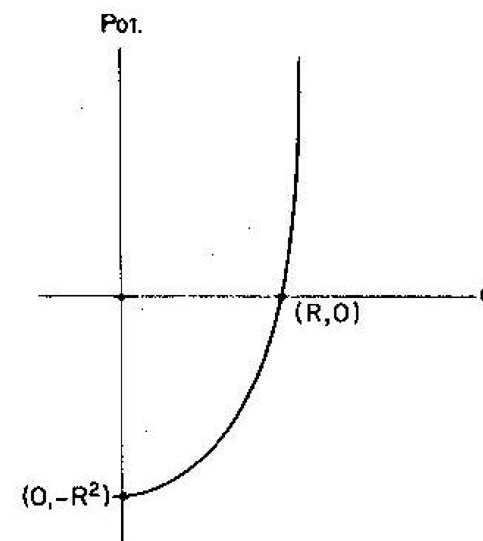
2) Se P pertence ao círculo, $d = R \Longrightarrow Pot\ P = 0$.

3) Se P é interior ao círculo, $d < R \Longrightarrow Pot\ P < 0$.

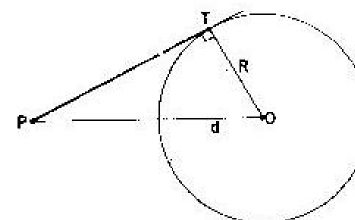
4) O centro é o ponto de potência mínima, ou seja, $Pot_{(o)}\ O = -R^2$.

5) Função potência: $(R_+ \rightarrow [-R^2, +\infty)$

$$d \mapsto d^2 - R^2$$

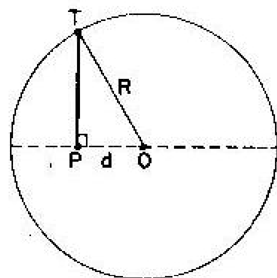


6) Se P é exterior ao círculo,



$$Pot_{(o)} P = PT^2$$

7) Se P é interior ao círculo,

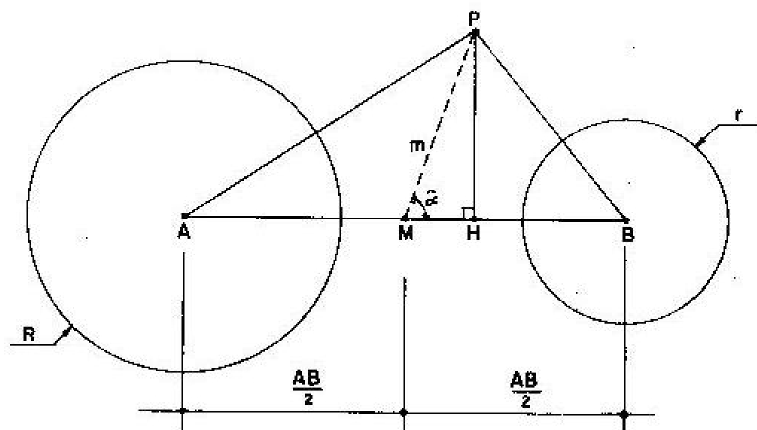


$$\text{Pot}_{(o)}\, P = -\, PT^2.$$

9.5 — EIXO RADICAL

Chamamos de Eixo Radical de dois círculos ao lugar geométrico dos pontos de igual potência em relação a esses círculos.

Para a pesquisa do lugar, consideremos dois círculos de centros A e B e raios R e r, respectivamente. Consideremos ainda M, médio de $\overline{AB}$, um ponto P deste lugar e sua projeção H sobre $\overline{AB}$.



$$\text{Pot}_{(A)}\, P = \text{Pot}_{(B)}\, P \implies$$

$$\implies PA^2 - R^2 = PB^2 - r^2 \implies$$

$$\implies PA^2 - PB^2 = R^2 - r^2 \qquad (1)$$

$$\Delta\, PMA \to PA^2 = \frac{AB^2}{4} + m^2 + 2\,\frac{AB}{2}\, m \cos \widehat{\alpha}$$

$$\Delta\, PMB \to PB^2 = \frac{AB^2}{4} + m^2 - 2\,\frac{AB}{2}\, m \cos \widehat{\alpha}.$$

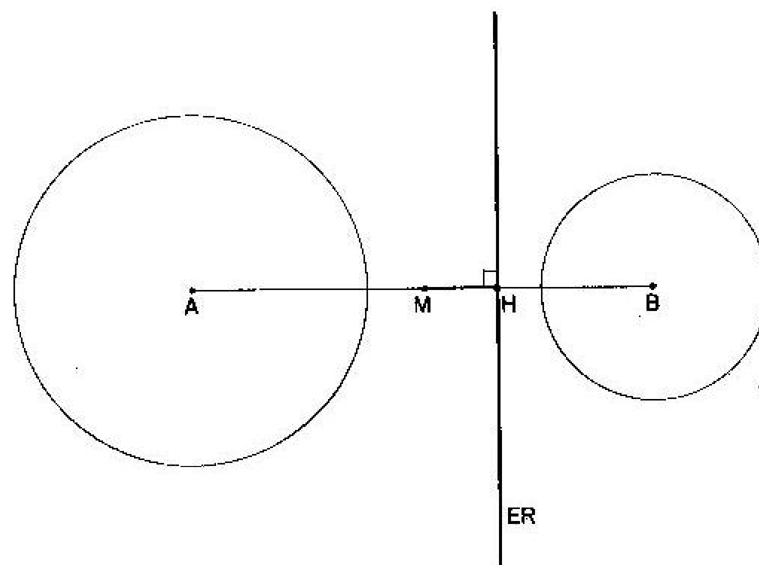
Subtraindo,

$$PA^2 - PB^2 = 2\, AB\, m \cos \widehat{\alpha} \ \text{ e, por } \qquad (1),$$

$$R^2 - r^2 = 2 \cdot AB \cdot MH. \qquad (2)$$

Vemos que, como $R^2 - r^2$ é constante, $2 \cdot AB \cdot MH$ também o será. Desta última, concluímos que MH é constante, não dependendo das posições de P. Logo, o L. G. procurado é a reta perpendicular a AB, que contém M, cuja posição determinaremos a partir de (2).

$$\boxed{MH = \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot AB}}$$

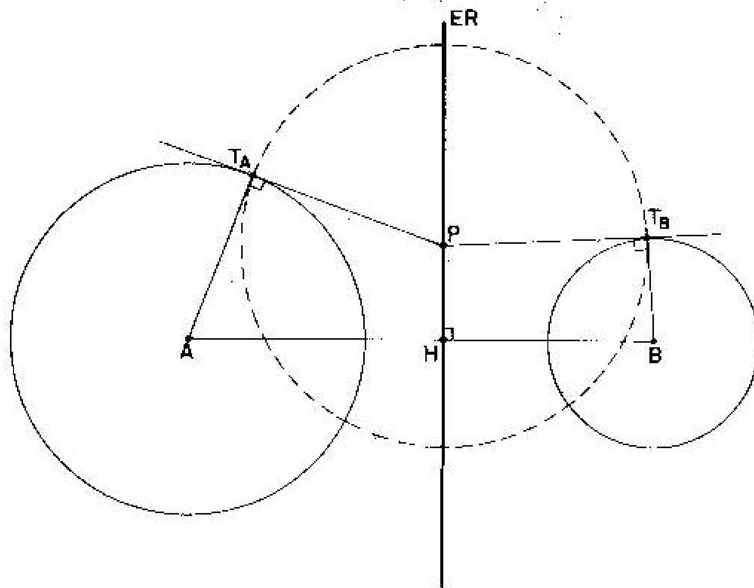


Observemos que:

1) O valor MH encontrado deve ser marcado a partir de M em direção ao centro do menor círculo, pois

$$R > r \Longrightarrow PA > PB \Longrightarrow HA > HB.$$

2) De qualquer ponto do eixo radical podemos traçar tangentes de mesmo comprimento aos dois círculos.



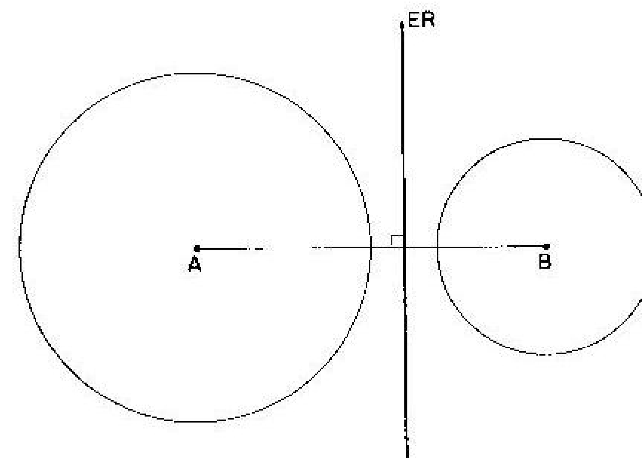
$$\left.\begin{array}{l} Pot_{(A)}\,P = PT_A^2 \\ Pot_{(B)}\,P = PT_B^2 \\ P \in ER \end{array}\right\} \Longrightarrow PT_A = PT_B$$

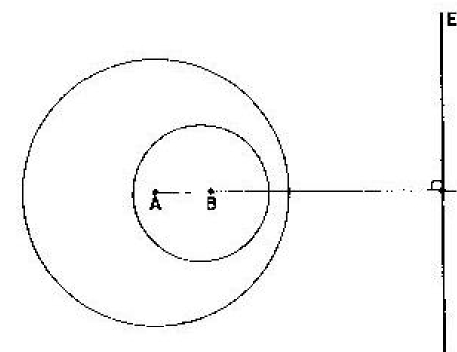
3) O eixo radical de dois círculos é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais aos círculos dados.

Realmente, pois $PT_A = PB_B$ e

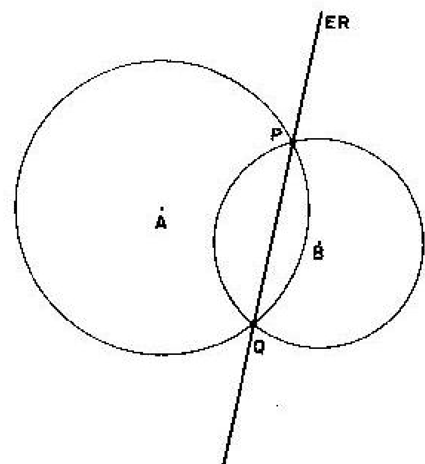
$$A\widehat{T}_A P = B\widehat{T}_B P = 90°.$$

4) Se dois círculos são interiores ou exteriores, o eixo radical não tem ponto comum com nenhum deles.





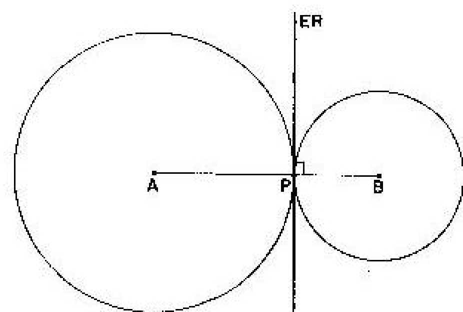
5) Se dois círculos são secantes, o eixo radical é a reta suporte da corda comum.

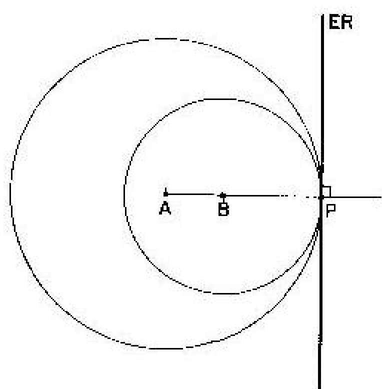


$$\left.\begin{array}{l} Pot_{(A)}\ P = Pot_{(B)}\ P = 0 \\ Pot_{(A)}\ Q = Pot_{(B)}\ Q = 0. \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ P, Q $\in$ ER.

6) Se dois círculos são tangentes, o eixo radical é a reta tangente comum.





$$\left.\begin{array}{l} Pot_{(A)} P = Pot_{(B)}\ P = 0 \\ ER \perp \overline{AB} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ ER é a tangente comum aos círculos.

7) Dois círculos concêntricos não possuem eixo radical.

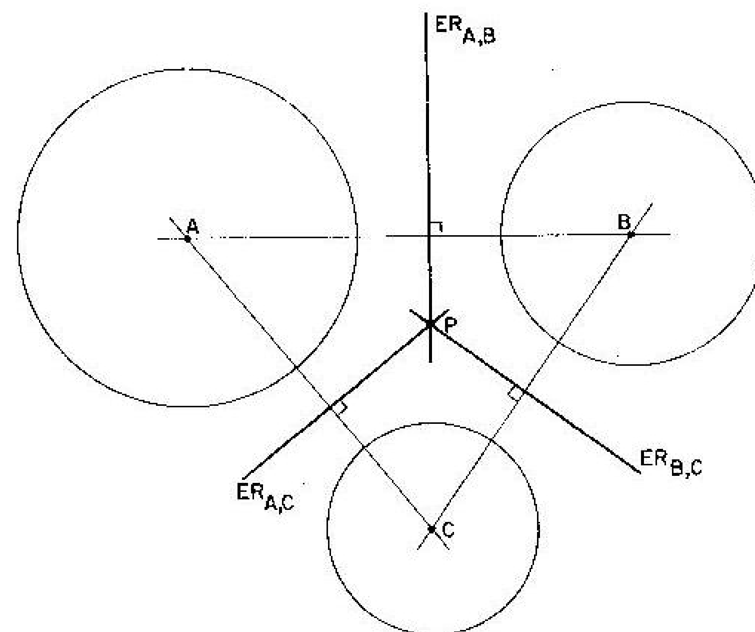
De fato, se lembrarmos que $MH = \dfrac{R^2 - r^2}{2AB}$

temos

$$B \to A \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} M \to A \\ MH \to \infty \end{array}\right.$$

9.6 — CENTRO RADICAL

Chamamos de *Centro Radical* de três círculos ao ponto que possui igual potência em relação aos mesmos. Consideremos três círculos de centros A, B e C, não colineares, e os eixos radicais $ER_{A,B}$ e $ER_{B,C}$ que concorrem em P.



$P \in ER_{A,B} \Longrightarrow Pot_{(A)}\ P = Pot_{(B)}\ P$

$P \in ER_{B,C} \Longrightarrow Pot_{(B)}\ P = Pot_{(C)}\ P$

Portanto,

$$Pot_{(A)}\,P = Pot_{(C)}\,P, \text{ ou seja, } P \in ER_{A,\,C.}$$

O ponto P é, então, o *Centro Radical*.

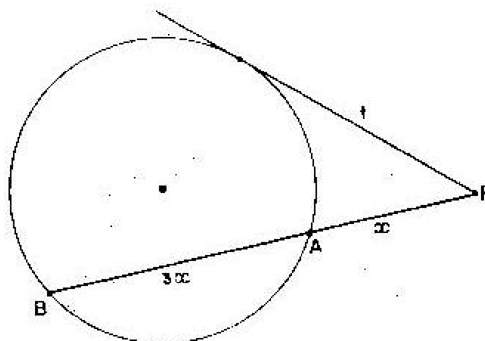
Observemos ainda que:

1) O centro radical é o único ponto de onde se pode traçar tangentes de mesmo comprimento aos três círculos.

2) O centro radical é o centro do único círculo ortogonal aos três círculos dados.

9.7 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

319. Calcule na figura o comprimento da tangente traçada de P ao círculo.



Solução

$t^2 = PA \cdot PB$, onde

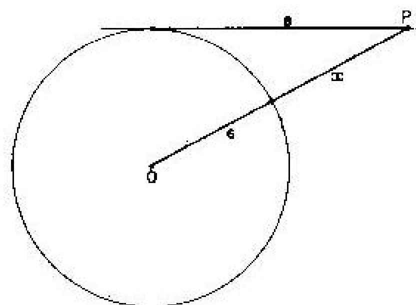
$PA = x$ e

$PB = 4x$

Logo, $t^2 = x \cdot 4x = 4x^2 \implies t = 2x$

Resposta: 2x

320. Calcule x na figura.



Solução

$$Pot_{(O)}\,P = d^2 - R^2 = (6 + x)^2 - 6^2 = t^2 = 8^2.$$

$$36 + 12x + x^2 - 36 = 64$$

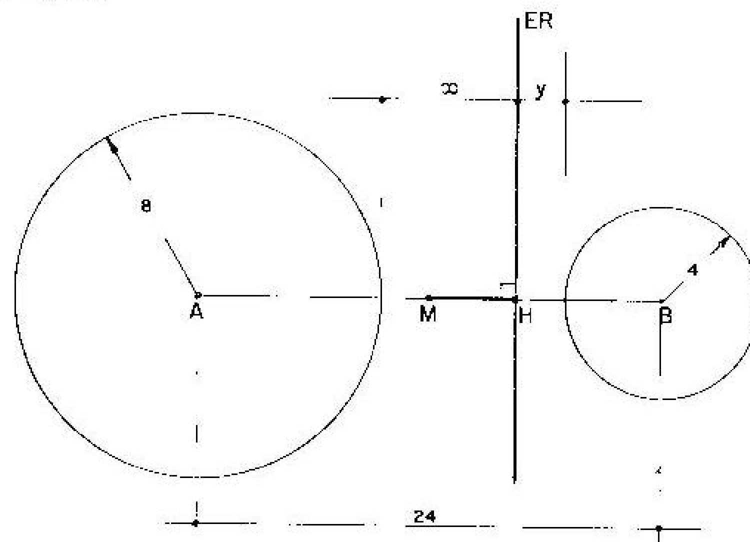
$$x^2 + 12x - 64 = 0 \implies$$

$$\implies \quad x = -16 \quad \text{(não serve)}$$

$$x = 4$$

Resposta: $x = 4$

321. Determine as distâncias do eixo radical a cada um dos círculos da figura.



Solução

Chamemos de x e y as distâncias procuradas e seja M médio de $\overline{AB}$. Temos

$$MH = \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot AB} \implies$$

$$\implies MH = \frac{8^2 - 4^2}{2 \cdot 24} = 1.$$

Então,

$$x = AM + MH - R$$

$$x = 12 + 1 - 8 = 5$$

$$y = AM - MH - r$$

$$y = 12 - 1 - 4 = 7$$

Respostas: $x = 5$

$y = 7.$

322. Considerando a figura do problema anterior, determine, dos pontos que possuem igual potência em relação aos dois círculos, aquele cuja potência é mínima e calcule esse valor.

Solução

Se as potências são iguais, o ponto pertence ao eixo radical dos dois círculos e se o valor da potência é mínimo, o ponto procurado é o ponto H da figura do problema 321, pois a distância a qualquer dos centros é mínima. Calcularemos a potência de H em relação a cada um dos círculos.

Do problema anterior, temos

$$AH = 13 \quad e \quad BH = 11.$$

Então,

$$Pot_{(A)}\,H = AH^2 - R^2 = 13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105$$

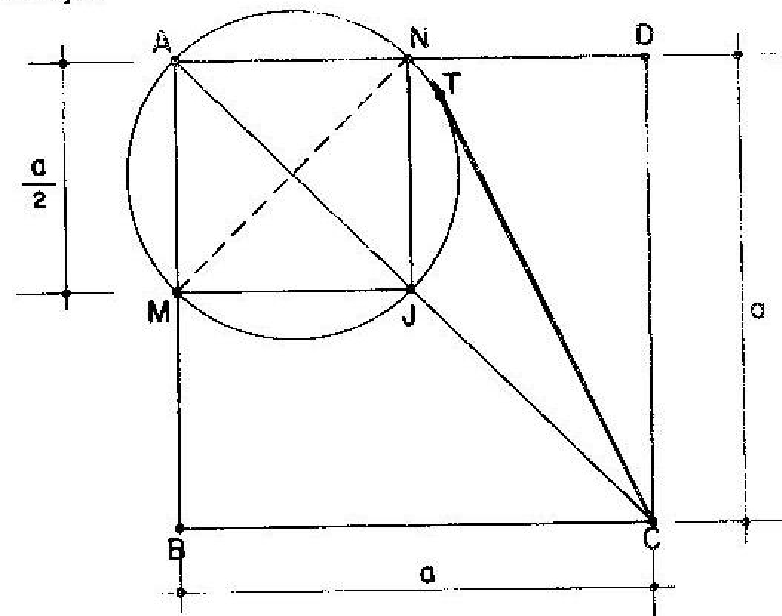
$$Pot_{(B)}\,H = BH^2 - r^2 = 11^2 - 4^2 = 121 - 16 = 105.$$

Resposta: $Pot_{(A)}\,H = Pot_{(B)}\,H = 105.$

323. Considere o círculo que passa pelo ponto A de um quadrado ABCD e pelos pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Prove que a

tangente a esse círculo traçada por C tem comprimento igual ao lado do quadrado.

Solução



Consideremos a figura. Verificamos imediatamente que $\overline{MN}$ e $\overline{AJ}$ são diâmetros e, conseqüentemente, AMJN é um quadrado de lado $\frac{a}{2}$. Então,

$$AC = a\sqrt{2}$$

$$MJ = \frac{a}{2}$$

$$AJ = CJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$CT^2 = CJ \cdot CA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2 \Longrightarrow CT = a.$$

324. Calcule x na figura

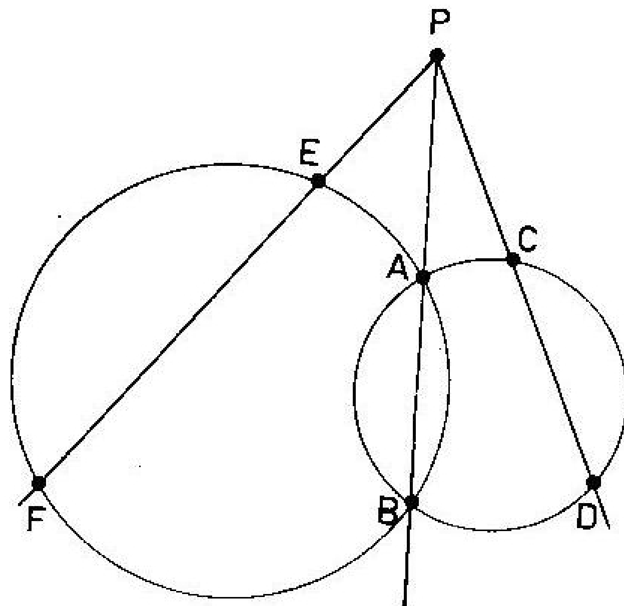
sendo

PC = 4

CD = 5

PE = 2

EF = x.



Solução

Como P pertence ao eixo radical dos círculos, P possui potências iguais em relação a ambos. Então,

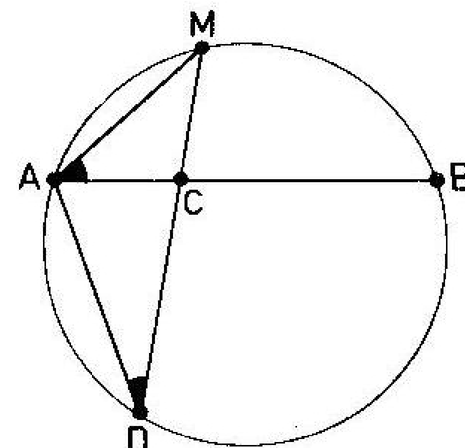
$$PC \cdot PD = PE \cdot PF \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4 \cdot 9 = 2(2 + x) \quad \Longrightarrow \quad x = 16.$$

Resposta: 16

325. Pelo ponto M médio do arco AB de um círculo traça-se uma corda $\overline{MD}$ que é concorrente com $\overline{AB}$ em C. Demonstre que MA é tangente ao círculo que passa por A, C e D.

Solução



Considerando os triângulos MAC e MDA da figura, temos

$$\hat{A} = \frac{\widehat{MB}}{2} = \frac{\widehat{AM}}{2} = \hat{D}.$$

Então, $\Delta\, MAC \sim \Delta\, MDA$

$$\Longrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow MA^2 = MC \cdot MD$, o que mostra que $\overline{MA}$ é tangente em A ao círculo que passa por A, C e D

PROBLEMAS PROPOSTOS

326. Calcule x na figura.

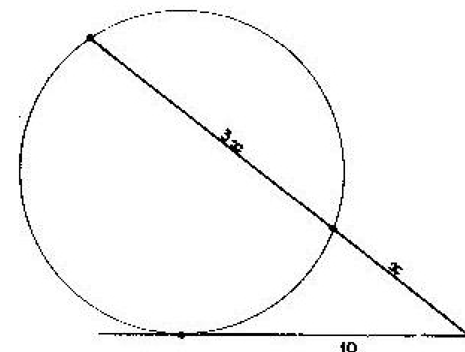
A) 8

B) 6

C) 5

D) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

E) NRA.



327. Na figura, calcule x sendo o raio do círculo igual a 4 e PO = 6.

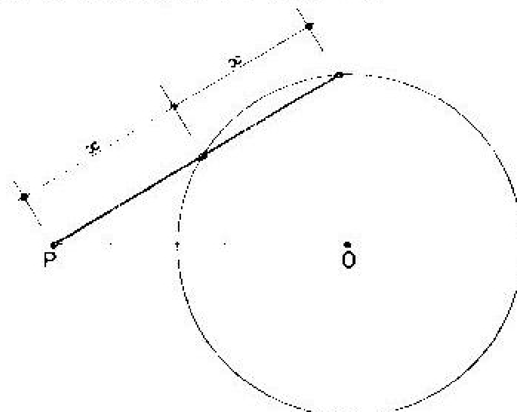
A) $\sqrt{10}$

B) $\sqrt{13}$

C) $\sqrt{15}$

D) $\sqrt{17}$

E) NRA.



328. Considere o círculo da figura. Então, $Pot_{(O)}A + Pot_{(O)}B + Pot_{(O)}C$ vale:

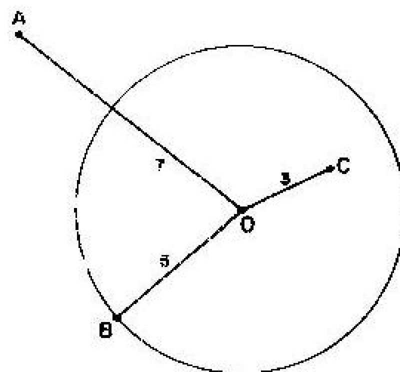
A) 8

B) 9

C) 33

D) 83

E) NRA.



329. Calcule x para que $Pot_{(O)}A + Pot_{(O)}B = 0$.

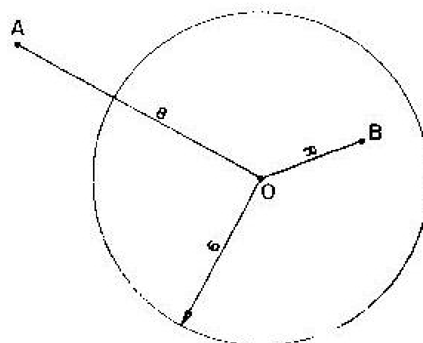
A) 2

B) 3

C) $2\sqrt{2}$

D) impossível

E) NRA.



330. Calcule x para que $Pot_{(O)}A + Pot_{(O)}B = 0$.

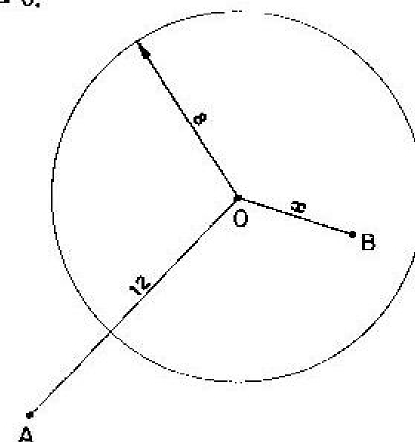
A) 0

B) 1

C) $\sqrt{2}$

D) impossível

E) NRA.



331. Calcule x na figura.

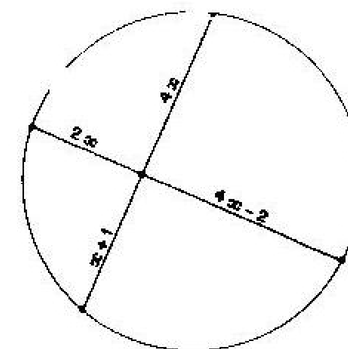
A) $\frac{1}{2}$

B) 1

C) 2

D) $\frac{5}{2}$

E) 3



332. Calcule o raio do círculo da figura.

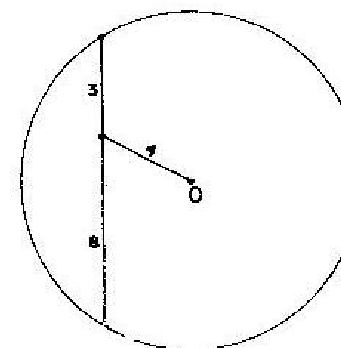
A) $\sqrt{10}$

B) $2\sqrt{10}$

C) $3\sqrt{10}$

D) impossível

E) NRA.



333. Em um círculo, as cordas AB e $\overline{CD}$ são perpendiculares e cortam-se em I. Traça-se por I uma perpendicular a $\overline{AD}$ que corta o círculo em E e G e $\overline{AD}$ em F. (F entre I e G). Se AF = 4, FD = 9 e FG = 5, então EI mede:

A) 1
B) $\frac{6}{5}$
C) $\frac{8}{5}$
D) $\frac{7}{6}$
E) NRA.

334. Seja P um ponto exterior a um círculo de centro O e raio R e tal que $OP = R\sqrt{3}$. Traça-se por P a secante PAB ao círculo. Se PA = R, AB é igual a:

A) R
B) $\frac{R}{2}$
C) $R\sqrt{2}$
D) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$
E) NRA.

335. Se a distância de um ponto ao centro de um círculo aumenta de 10%, a sua potência em relação a esse círculo aumenta de:

A) 10%
B) 20%
C) não é possível calcular
D) 100%
E) 21%

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 336 E 337

Dois círculos de centros A e B e raios 12 e 8 são tais que AB = 20.

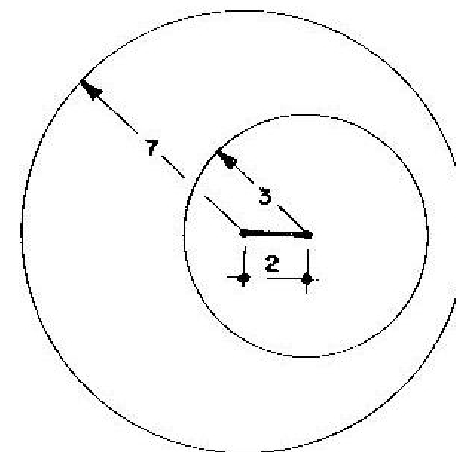
336. A distância de A ao eixo radical desses círculos é:

A) 19
B) 20
C) 21
D) 29
E) NRA.

337. O valor da menor potência que um ponto pode possuir em relação aos dois círculos é:

A) 156
B) 189
C) 204
D) 297
E) NRA.

338. A distância do eixo radical dos dois círculos ao maior deles é:

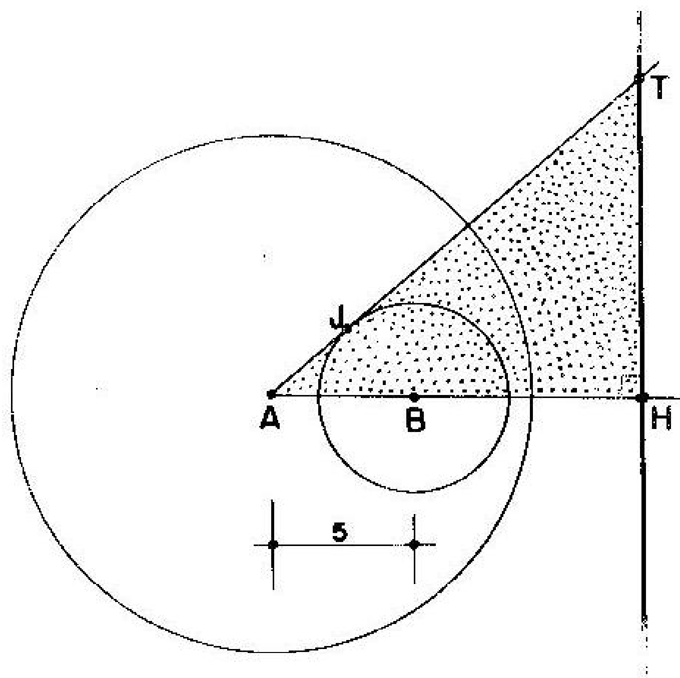


A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 10.

Num triângulo ABC, a ceviana $\overline{AD}$ encontra o círculo circunscrito em E. Se AB = 5, AC = 4, BC = 6 e BD = 4, então DE mede:

A) $\sqrt{11}$
B) $\sqrt{7}$
C) $\frac{8}{11}$
D) $3\sqrt{3}$
E) $\frac{8}{\sqrt{11}}$

340. Considere os círculos da figura de raios 10 e 4 e seu eixo radical. Se $\overline{OT}$ é tangente em J ao círculo menor, calcule a área do triângulo ATH.



A) $\dfrac{11.881}{150}$

B) $\dfrac{12.773}{133}$

C) $\dfrac{11.166}{161}$

D) $\dfrac{11.227}{100}$

E) $\dfrac{11.655}{182}$

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 341 E 342

Seja P um ponto de um círculo de diâmetro AB e seja $\overline{PC}$ perpendicular a $\overline{AB}$. O círculo de diâmetro $\overline{PC}$ encontra o primeiro em E e a reta PE corta AB em M. Sabe-se que AB = 16 e MA = 2.

341. MC mede:

A) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{2}$

E) 6

342. PC mede:

A) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$

E) 4

343. Dois círculos de raios 3 e 4 são ortogonais. Calcule a distância de um ponto P à reta que contém os centros sabendo que ele possui potência igual a 16 em relação aos dois círculos.

A) $\sqrt{34}$ C) $\dfrac{4}{5}\sqrt{34}$

B) $\dfrac{5}{4}\sqrt{34}$ D) $\dfrac{3}{5}\sqrt{34}$

E) NRA.

344. As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um círculo são perpendiculares e cortam-se em I. Se AI = 4, IB = 6 e CI = 3, calcule o diâmetro deste círculo.

A) 5 C) $5\sqrt{3}$

B) $5\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{5}$

E) NRA.

345. Sendo $\overline{AD}$ a bissetriz interna ao ângulo A do triângulo ABC, prove que $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

346. É dado um triângulo isósceles ABC, inscrito em um círculo, e um ponto M do prolongamento da base $\overline{BC}$ do triângulo. Prove que $MA^2 = AB^2 - MB \cdot MC$.

347. Os segmentos das tangentes traçadas de P a dois círculos distintos não concêntricos são congruentes. Determine o lugar geométrico de P

348. O ângulo entre as tangentes traçadas de P ao círculo A é o mesmo ângulo formado pelas tangentes traçadas deste ponto ao círculo B. Determine o lugar geométrico de P.

349. Prove que, se uma secante a dois círculos ortogonais passa pelo centro de um deles, os quatro pontos de interseção formam uma divisão harmônica.

350. (IME — 67). Dois círculos exteriores possuem diâmetros 2 e 10 e seu eixo radical dista 5 de um deles. Pede-se:

a) O comprimento da tangente comum externa.

b) Sendo P o ponto em que o ER corta a tangente comum externa e O e O' os centros dos dois círculos, determinar a área do triângulo POO'.

CAPÍTULO 10

POLÍGONOS REGULARES

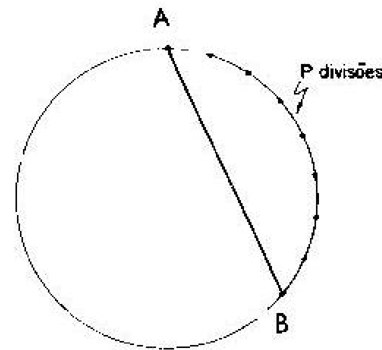
10.1 — DEFINIÇÃO

Polígono regular é todo polígono que possui lados congruentes e ângulos também congruentes. Verificamos, ainda, que todo polígono regular é inscritível e circunscritível.

10.2 — CONSTRUÇÃO

Consideremos um círculo dividido em n partes iguais.

A partir de um determinado ponto de divisão traçaremos cordas consecutivas, congruentes, correspondentes a p divisões. Então, cada corda determina um arco

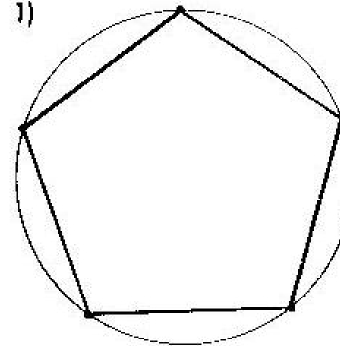


$$\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{n} \cdot p$$

Esta operação será repetida, até que voltemos ao ponto de partida. O polígono obtido terá, então, gênero g, e para seu fechamento necessitamos dar k voltas no círculo. Ao número k chamamos de espécie do polígono. Se $k = 1$, o polígono é convexo e se $k > 1$, o polígono é *estrelado*.

Exemplos:

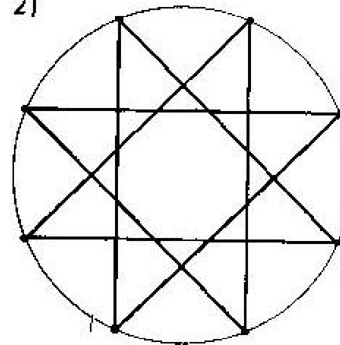
1)



divisões do círculo: $n = 5$
construção: $p = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ gênero do polígono: $g = 5$
espécie: $k = 1$

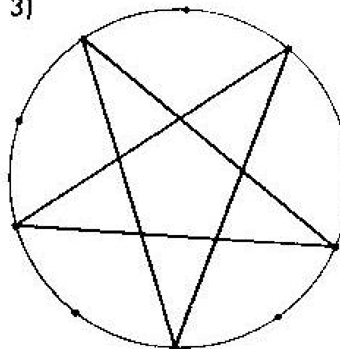
2)



divisões do círculo: $n = 8$
construção: $p = 3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ gênero do polígono: $g = 8$
espécie: $k = 3$

3)



divisões do círculo: $n = 10$
construção: $p = 4$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ gênero do polígono: $g = 5$
espécie: $k = 2$

Verificamos que:

a) O arco correspondente a um lado mede $\frac{360°}{n} \cdot p$

b) A soma dos g arcos é igual a $360° \cdot k$, sendo k o número de voltas necessárias para o fechamento do polígono (espécie do polígono).

Então,

$$\frac{360°}{n} \cdot p \cdot g = 360° \cdot k \implies$$

$\implies$ $\boxed{g = \frac{n}{p} \cdot k}$, sendo k o menor inteiro positivo que torna inteira a expressão $\frac{nk}{p}$.

c) Quando $p = 1$ e $k = 1$, o polígono obtido é convexo de gênero n, como no primeiro exemplo.

d) Quando n e p são primos entre si, temos $k = p$ e $g = n$, como no segundo exemplo.

e) Quando n é múltiplo de p, temos

$$\frac{n}{p} = n' \quad \text{e} \quad g = n'k$$

Então, $k = 1$ e $g = \frac{n}{p}$, sendo o polígono convexo de gênero $\frac{n}{p}$.

Seria este o caso se dividíssemos um círculo em 8 partes e uníssemos os pontos de dois em dois, obtendo assim um quadrado.

f) Quando n e p admitem fatores comuns, temos

$$\frac{n}{p} = \frac{n'}{p'}, \text{ sendo } n' \text{ e } p' \text{ primos entre si.}$$

Então, como $g = \frac{n'}{p'} \cdot k$, concluímos que $k = p'$ e $g = n'$, sendo o polígono estrelado de gênero $n' < n$, como no terceiro exemplo.

Observação

Consideremos $p < \frac{n}{2}$ pois, unindo os n pontos de divisão de p em p ou de $n - p$ em $n < p$, obteremos o mesmo polígono.

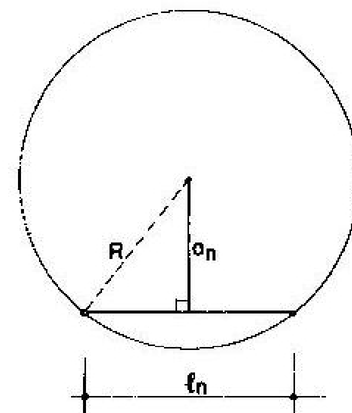
10.3 — LADO E APÓTEMA

Seja l_n^p uma corda de um círculo correspondente a p divisões de um círculo que está dividido em n partes. Assim, l_8^1 ou simplesmente l_8 é o lado do octógono convexo, l_{10}^3 o lado do decágono estrelado de espécie 3.

Vemos, ainda, que, por exemplo, l_{20}^4 é o correspondente ao lado do pentágono convexo ($l_{20}^4 = l_5^1$) e l_{14}^4 é correspondente ao lado do heptágono estrelado de espécie 2 (pois $l_{14}^4 = l_7^2$).

Chamamos de *apótema* de um polígono regular à distância do centro do círculo circunscrito a um dos lados.

Se p e n são primos entre si, e $p < \frac{n}{2}$, l_n^p é o lado do polígono de gênero n e espécie p, a_n^p é o apótema desse polígono. Se um polígono de gênero n está inscrito em um círculo de raio R, temos



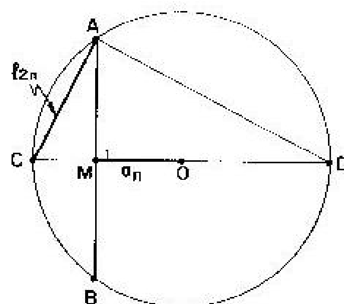
$$R^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \quad \text{ou}$$

$$a_n = \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}}$$

10.4 — DUPLICAÇÃO DO GÊNERO DE UM POLÍGONO CONVEXO

Se l_n é o lado do polígono regular convexo de gênero n, inscrito em um círculo de raio R, calcularemos l_{2n}, que é o lado do polígono regular de gênero 2n inscrito no mesmo círculo.

Seja $AB = l_n$ e o diâmetro $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$. Como $\widehat{AC} = \frac{\widehat{AB}}{2}$, então $AC = l_{2n}$.



Do triângulo retângulo ACD vem

$$AC^2 = CM \cdot CD$$

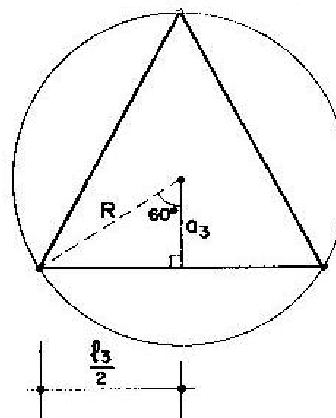
$$(l_{2n})^2 = 2R \cdot \overbrace{(R - a_n)}$$

$$(l_{2n})^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}}\right) \implies$$

$$\implies \quad l_{2n} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}}\right)}$$

10.5 — CÁLCULO DOS LADOS DOS POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NUM POLÍGONO DE RAIO R

1 — Triângulo equilátero (n = 3)



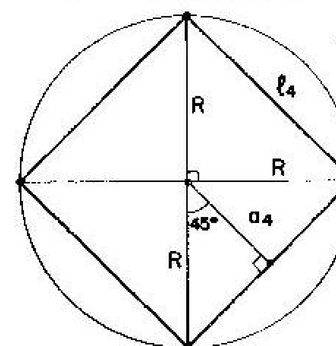
$$\frac{l_3}{2} = R \text{ sen } 60° \implies$$

$$\implies \quad l_3 = R\sqrt{3}$$

$$a_3 = R \cos 60° \implies$$

$$\implies \quad a_3 = \frac{R}{2}$$

2 — Quadrado (n = 4)



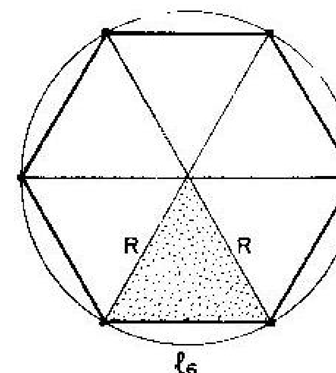
$$(l_4)^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$l_4 = R\sqrt{2}$$

$$a_4 = R \cos 45° \implies$$

$$\implies \quad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

3 — Hexágono (n = 6, p = 1)



Como o hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros congruentes, temos

$$l_6 = R$$

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Observação

$n = 6$, $p = 2$ forma um triângulo equilátero.

4 — Octógono convexo ($n = 8$, $p = 1$)

Pela fórmula da duplicação, vamos obter l_8 em função de l_4, cujo valor conhecemos.

$$l_8 = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}}\right)} \implies$$

$$\implies \boxed{l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Para o apótema, temos

$$a_8 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{2})}{4}} \implies$$

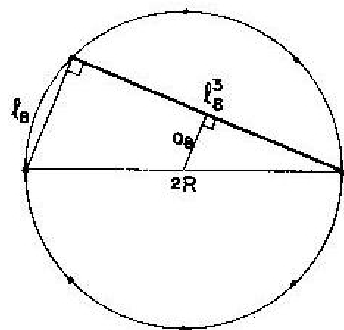
$$\implies a_8 = \sqrt{\frac{R^2(4 - 2 + \sqrt{2})}{4}} \implies$$

$$\implies \boxed{a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Observação

$n = 8$, $p = 2$ forma um quadrado.

5 — Octógono estrelado ($n = 8$, $p = 3$)



$$(l_8^3)^2 = (2R)^2 - (l_8)^2$$

$$= 4R^2 - R^2(2 - \sqrt{2})$$

$$= R^2(4 - 2 + \sqrt{2}) \implies$$

$$\implies \boxed{l_8^3 = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Notamos ainda que

$$a_8^3 = \frac{l_8}{2}\text{; logo,}$$

$$\boxed{a_8^3 = \frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

6 — Dodecágono convexo ($n = 12$, $p = 1$)

Novamente pela fórmula da duplicação a partir de $l_6 = R$, temos

$$l_{12} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}\right)} \implies$$

$$\implies \boxed{l_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

E, para o apótema,

$$a_{12} = \sqrt{R^2 - \frac{R(2 - \sqrt{3})}{4}} \implies$$

$$\implies \boxed{a_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Observações

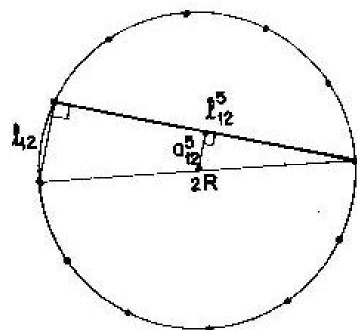
$n = 12$, $p = 2$ forma um hexágono regular

$n = 12$, $p = 3$ forma um quadrado

$n = 12$, $p = 4$ forma um triângulo equilátero

7 — Dodecágono estrelado (n = 12, p = 5)

$$(l_{12}^5)^2 = (2R)^2 - (l_{12})^2 =$$
$$= 4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3}) =$$
$$= R^2(4 - 2 + \sqrt{3}) =$$



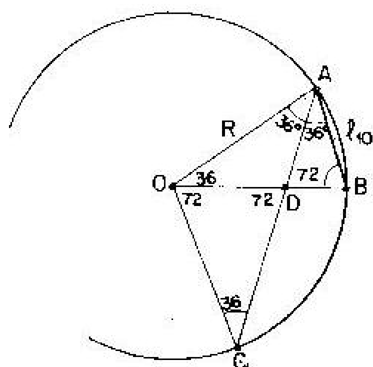
$$\Longrightarrow \boxed{l_{12}^5 = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Notamos ainda que

$a_{12}^5 = \dfrac{l_{12}}{2}$; logo,

$$\boxed{a_{12}^5 = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

8 — Décagono convexo (n = 10, p = 1)



Na figura, onde $\widehat{O} = 36°$, AB = l_{10} e $\overline{AD}$ é bissetriz de $\widehat{A}$, temos

$$AD = OD = l_{10}$$
$$DB = R - l_{10}.$$

Pelo teorema das bissetrizes,

$$\frac{R}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{R - l_{10}} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (l_{10})^2 + R\,l_{10} - R^2 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \boxed{l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

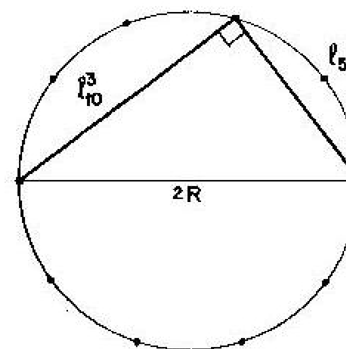
9 — Decágono estrelado (n = 10, p = 3)

O lado do decágono estrelado l_{10}^3 compreende um arco de $3 \times 36° = 108°$. Assim, na figura anterior, AC = l_{10}^3. Mas o triângulo ODC é isósceles e assim

$$DC = R \text{ e } AD = l_{10}$$

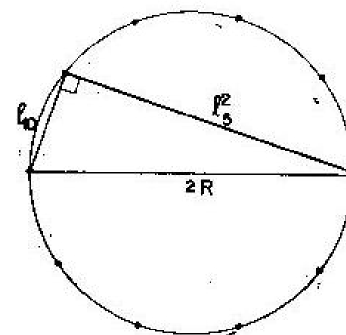
Então,
$$l_{10}^3 = l_{10} + R$$
$$l_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) + R \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \boxed{l_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)}$$

10 — Pentágono convexo (n = 10, p = 2)



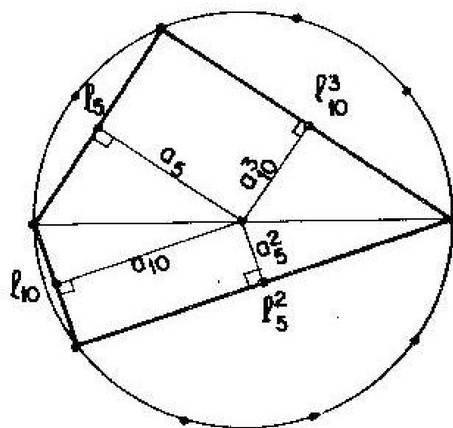
$$(l_5)^2 = (2R)^2 - (l_{10}^3)^2$$
$$(l_5)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} + 1)^2$$
$$(l_5)^2 = \frac{R^2(16 - 6 - 2\sqrt{5})}{4} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \boxed{l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

11 — Pentágono estrelado (n = 10, p = 4)



$$(l_5^2)^2 = (2R)^2 - (l_{10})^2$$
$$(l_5^2)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2$$
$$(l_5^2)^2 = \frac{R^2(16 - 6 + 2\sqrt{5})}{4} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \boxed{l_5^2 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Para o cálculo dos apótemas dos decágonos e pentágonos, observemos a figura abaixo.



Vemos que

$$a_5 = \frac{l_{10}^3}{2}$$

$$a_5^2 = \frac{l_{10}}{2}$$

$$a_{10} = \frac{l_5^2}{2}$$

$$a_{10}^3 = \frac{l_5}{2}$$

10.6 — COMPRIMENTO DO CÍRCULO

Demonstraremos, inicialmente, que os comprimentos de dois círculos são proporcionais a seus diâmetros.

Demonstração

Sejam dois círculos de comprimentos C e C′ e raios R e R′. Seja x um segmento tal que

$$x = \frac{R'}{R} \cdot C$$

Consideremos dois polígonos regulares convexos semelhantes inscritos nos dois círculos. Podemos escrever

$$\frac{l_n}{l_n'} = \frac{R}{R'}$$

Como $n \cdot l_n = 2p$ e $n \cdot l_n' = 2p'$, temos

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{R}{R'}$$

mas, por (1), temos

$$\frac{R}{R'} = \frac{C}{x}$$

e então

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{C}{x}$$

ou

$$x = \frac{C}{2p} \cdot 2p'$$

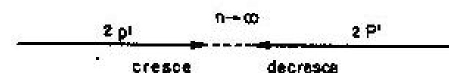
Como a relação $\frac{C}{2p}$ é maior que a unidade, $x > 2p'$. Analogamente, circunscrevendo dois polígonos regulares semelhantes de perímetros 2P e 2P′, temos

$$\frac{2P}{2P'} = \frac{C}{x} \quad \text{ou}$$

$$x = \frac{C}{2P} \cdot 2P'.$$

Como a relação $\frac{C}{2P}$ é menor que a unidade, $x < 2P'$.

Vemos que x está compreendido sempre entre 2p′ e 2P′.



Quando o número de lados cresce indefinidamente, $x = C'$. Voltando, então, em (1), temos

$$C' = \frac{R'}{R} . C \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} = \text{cte}}$$

Naturalmente que é constante a relação entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro. Chamamos essa constante de π. Então,

$$\frac{C}{2R} = \pi \Longrightarrow \boxed{C = 2\pi R}$$

Para que possamos ter uma idéia do número π, construímos uma tabela, utilizando perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos divididos por $2R$. Os lados desses polígonos foram obtidos pela fórmula da duplicação do gênero, a partir do hexágono regular.

Sejam

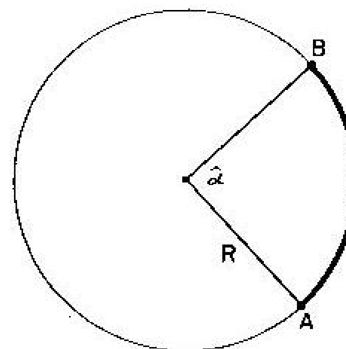
n = n.º de lados do polígono
$2p$ = perímetros dos polígonos inscritos
$2P$ = perímetros dos polígonos circunscritos
R = raio do círculo

n	$\frac{2p}{2R}$	$\frac{2P}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14156	3,14167

Notamos que os números da primeira coluna crescem e os da segunda decrescem, tendendo para o número π, que apresentamos com as vinte primeiras decimais.

$$\pi = 3,14159265358979323846\ldots$$

10.7 — COMPRIMENTO DE UM ARCO



Seja C_{AB} o comprimento do arco $\widehat{AB}$. Como este comprimento é proporcional à sua medida, temos

$\widehat{\alpha}$ em graus

$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ \to 2\pi R \\ \alpha \to C_{AB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{C_{AB} = \frac{\alpha}{360} . 2\pi R}$$

$\widehat{\alpha}$ em radianos

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rd} \to 2\pi R \\ \alpha \to C_{AB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{C_{AB} = \alpha R}$$

10.8 — CÁLCULO DE π

Consideremos um círculo de raio R e um polígono regular inscrito de n lados e perímetro 2p.

Este perímetro é menor que o comprimento do círculo, mas tende a esse valor quando o número de lados cresce indefinidamente.

Temos

$$\pi = \frac{C}{2R} \text{ e, fazendo } R = 1,$$

$$\pi = \frac{C}{2}$$

Consideraremos, agora, polígonos regulares inscritos no círculo de raio unitário, tendo cada um o dobro do número de lados do anterior. Utilizaremos, para isso, a fórmula da duplicação dos gêneros.

$$l_4 = \sqrt{2}$$

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$l_{16} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1^2 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}}\right)}$$

$$l_{16} = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)}$$

$$l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Analogamente,

$$l_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

screveremos l_{32} como $l_2 4 + 1$, sendo 4 o número de radicais. Assim,

$$l_2 n + 1 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$$

com n radicais.

Esse polígono possui gênero igual a 2^{n+1} e seu perímetro é

$$2^{n+1} \cdot l_2 n + 1.$$

Quando o número de lado cresce indefinidamente, esse valor tende para o comprimento do círculo que, para R = 1, é igual ao dobro do número π. Assim, dividindo por 2, temos

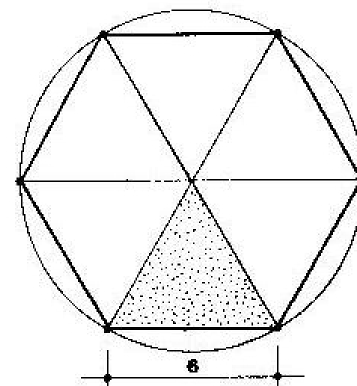
$$\boxed{\pi = 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}}$$

com n radicais.

10.9 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

351. Calcule a área do hexágono regular inscrito em um círculo de raio igual a 6.

Solução



$l_6 = R = 4$

A área do hexágono regular é igual a 6 vezes a área do triângulo equilátero de lado igual a 4. Então,

$$S = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}.$$

Resposta: $54\sqrt{3}$ u. a.

352. Calcule a área do polígono regular convexo de perímetro 2p e apótema a.

Solução

Seja *l* o comprimento do lado e *n*, seu gênero. Como o polígono regular pode ser dividido em *n* triângulos de base *l* e altura *a*,

temos

$S = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}$. Mas nl = perímetro do polígono $= 2p$.

$$S = \frac{2p \cdot a}{2} \Longrightarrow S = p \cdot a$$

Resposta: $S = pa$

353. Calcule o lado do polígono regular convexo de 24 lados.

Solução

Poderemos calcular l_{24} partindo de l_{12}, que conhecemos pela fórmula da duplicação do gênero.

$$l_{24} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{l_{12}^2}{4}}\right)}$$. Como $l_{12} = R\sqrt{2 - 3}$,

$$l_{24} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{3})}{4}}\right)}$$

$$l_{24} = \sqrt{2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{3}}\right)}$$

$$l_{24} = \sqrt{R\,(2R - R\sqrt{2 + \sqrt{3}})}$$

$$l_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Resposta: $R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

354. A razão entre os comprimentos de dois círculos é k. Calcule a razão entre suas áreas.

Solução

$$\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2} = k = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = k^2$$

Resposta: k^2.

355. O comprimento de um círculo de raio R_1 é igual ao comprimento de um arco de 30° de um círculo de raio R_2. Se a área do primeiro é igual a 2, calcule a área do segundo.

Solução

Comprimento do círculo de raio $R_1 = 2\pi R_1$

Comprimento do arco de 30° do círculo de raio

$$R_2 = \frac{30}{360} - 2\pi R_2 = \frac{1}{12} \cdot 2\pi R_2$$

Igualando, $2\pi R_1 = \frac{1}{12} 2\pi R_2 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{12}$$

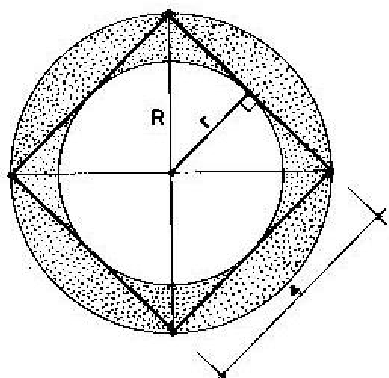
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \Longrightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{144}$$ Se $S_1 = 2$,

$$\frac{2}{S_2} = \frac{1}{144} \Longrightarrow S_2 = 288$$

Resposta: 288

356. Calcule a área da coroa circular limitada pelos círculos inscrito e ciscunscrito a um quadrado de lado 4.

Solução



$$l_4 = 4 = R\sqrt{2} \Longrightarrow R = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$a_4 = r = \frac{4}{2} = 2$$

$$S = \pi\,(R^2 - r^2)$$

$$S = \pi\,[(2\sqrt{2})^2 - 2^2] = 4\pi$$

Resposta: 4π.

357. Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 os vértices de um pentágono regular convexo inscrito em um círculo de raio unitário. Calcule o produto.

$$P = P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot P_1P_4 \cdot P_1P_5$$

Solução

Como

$P_1P_2 = P_1P_5 = l_5$ e

$P_1P_3 = P_1P_4 = l_5^2$, temos

$$P = (l_5)^2 \cdot (l_5^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5})\,\frac{1}{4}(10 + 2\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{16}(100 - 20) = \frac{80}{16} = 5.$$

Resposta: 5.

Observação

Este problema pode ser generalizado. Cabe ao leitor interessado demonstrar que, se P_1, P_2, P_3, ..., P_n são vértices de um

polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio igual a 1, $P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot P_1P_4 \ldots P_1P_n = n$.

358. O comprimento de um círculo é 12π. Um arco AB deste círculo tem comprimento igual a 5π. Calcule em graus a medida do arco AB.

Solução

$$\begin{matrix} 12\pi - 360^\circ \\ 5\pi - \alpha \end{matrix} \Longrightarrow \alpha = 150^\circ$$

Resposta: 150°

PROBLEMAS PROPOSTOS

359. A área do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio unitário é:

A) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$
E) NRA.

360. Calcule a distância entre dois lados opostos de um hexágono regular de lado $2\sqrt{3}$.

A) $2\sqrt{6}$ C) 4
B) $3\sqrt{3}$ D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
E) 6

361. Calcule a razão entre as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo.

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{8}$
E) NRA.

362. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos equiláteros inscrito e circunscrito ao mesmo circulo.

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{9}$

363. Calcule o comprimento do círculo circunscrito a um triângulo equilátero sabendo que o círculo nele inscrito tem comprimento igual a 8π.

A) 16π C) 32π

B) 24π D) 48π

E) 64π

364. A área do círculo circunscrito a um triângulo equilátero mede 400π. A área do triângulo equilátero mede:

A) 300π C) $600\sqrt{3}$

B) $300\sqrt{3}$ D) 600π

E) NRA.

365. Quantos polígonos regulares não semelhantes existem com 48 lados?

A) 5 C) 7

B) 6 D) 8

E) 9

366. Quantos polígonos regulares não semelhantes existem com 32 lados?

A) 4 C) 6

B) 5 D) 7

E) NRA.

367. Quando se divide um círculo em 84 partes e se une os pontos de divisão d… em 7, obtemos:

A) um polígono convexo de 84 lados

B) um polígono de 84 lados e espécie 7

C) um dodecágono de espécie 7

D) um dodecágono convexo

E) NRA.

368. Quando se divide um círculo em 90 partes e se une os pontos de divisão de 24 em 24, obtemos:

A) um polígono estrelado de 90 lados

B) um polígono convexo de 24 lados

C) um pentadecágono estrelado

D) um eneágono convexo

E) NRA.

369. Dividindo-se um círculo em 47 partes iguais, quantos polígonos diferentes podem ser construídos?

A) 21 C) 23

B) 22 D) 24

E) NRA.

370 O lado de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio R é

A) $R\sqrt{3}$ C) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

B) $2R\sqrt{3}$ D) $3R\sqrt{3}$

E) NRA.

371 Calcule o perímetro do hexágono circunscrito a um círculo de raio R.

A) $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$ C) $3R\sqrt{3}$

B) $2R\sqrt{3}$ D) $4R\sqrt{3}$

E) $6R\sqrt{3}$

372 Calcule a área do hexágono cujos vértices são os pontos médios dos lados de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 4.

A) $12\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{3}$

B) $18\sqrt{3}$ D) $30\sqrt{3}$

E) NRA

373. Calcule a distância entre dois lados opostos de um octógono regular inscrito em um círculo de raio unitário.

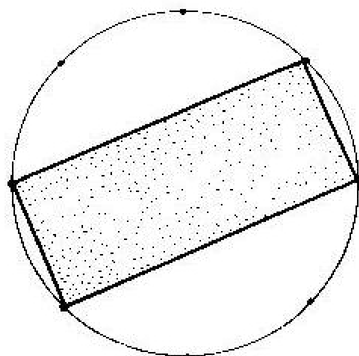
A) $\sqrt{2}$ C) $2+\sqrt{2}$

B) $\sqrt{2}+1$ D) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

E) NRA.

374. Um círculo de raio $\sqrt{2}$ está dividido em 8 partes iguais, como mostra a figura. A área do retângulo assinalado é:

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) 2
D) 4
E) NRA.



375. Sejam l_5 e l_{10}^3 os lados do pentágono regular convexo e do decágono regular estrelado inscritos em um círculo de raio 1. Então, $(l_5)^2 + (l_{10}^3)^2$ é igual a:

A) 1 C) 4
B) 2 D) 10
E) NRA.

376. Calcule a altura de um trapézio isósceles inscrito em um círculo de raio 2 sabendo que as bases estão situadas em semiplanos opostos determinados por um diâmetro paralelo e são iguais aos lados do triângulo equilátero e hexágono regular inscritos nesse círculo.

A) $\sqrt{3} + 1$ C) $\sqrt{3}$
B) $\sqrt{3} - 1$ D) $\sqrt{3} + 2$
E) NRA.

377. O lado do octógono regular inscrito num círculo de raio R mede $\sqrt{2}$. Então, R vale:

A) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ C) $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
B) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ D) $2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
E) NRA.

378. Os catetos de um triângulo retângulo são iguais ao lado do hexágono e do decágono regulares convexos inscritos num mesmo círculo. A hipotenusa desse triângulo é:

A) l_{10}^3 C) l_5^2
B) l_5 D) l_8
E) NRA.

379. (CICE — 68) Seja p o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r. Assinale qual das seguintes relações é verdadeira.

A) $p + 2n\sqrt{2}\, r$ C) $p < 7r$
B) $p + (n + 1)\sqrt{5}\, r$ D) $p > 8r$
E) $p = \dfrac{n^2}{2}\sqrt{3}\, r$

380. As cordas AB e CD que não se cortam no interior de um círculo de raio R medem, respectivamente, $\dfrac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ e $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. As retas AC e CD formam ângulo de:

A) 36° C) 57° ou 87°
B) 21° ou 51° D) o problema está indeterminado
E) NRA.

381. Considere dois dodecágonos regulares convexos de lados 2 e 4. Calcule o lado do dodecágono regular convexo cuja área seja a soma das áreas dos dois primeiros.

A) 6 C) 8
B) $\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{5}$
E) NRA.

382. Considere um triângulo equilátero e um quadrado inscritos em um círculo de raio unitário. Então, $l_3 + l_4$ é aproximadamente igual a:

A) 3
B) π
C) e (base dos logaritmos neperianos)
D) $\dfrac{24}{7}$
E) $\dfrac{23}{6}$

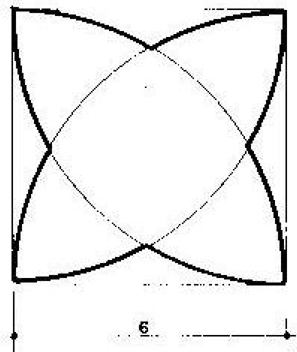
383. As duas tangentes traçadas de um mesmo ponto a um círculo de raio 2 determinam dois arcos sobre o círculo, sendo o menor de comprimento $\dfrac{\pi}{3}$. O ângulo entre as tangentes é:

A) 100° C) 135°
B) 120° D) 150°
E) 160°

384. A distância entre os pontos A e B é 3. Traçam-se círculos de raio 3 com centros em A e B, que se cortam em M e N. Calcule o perímetro da figura curvilínea AMBN.

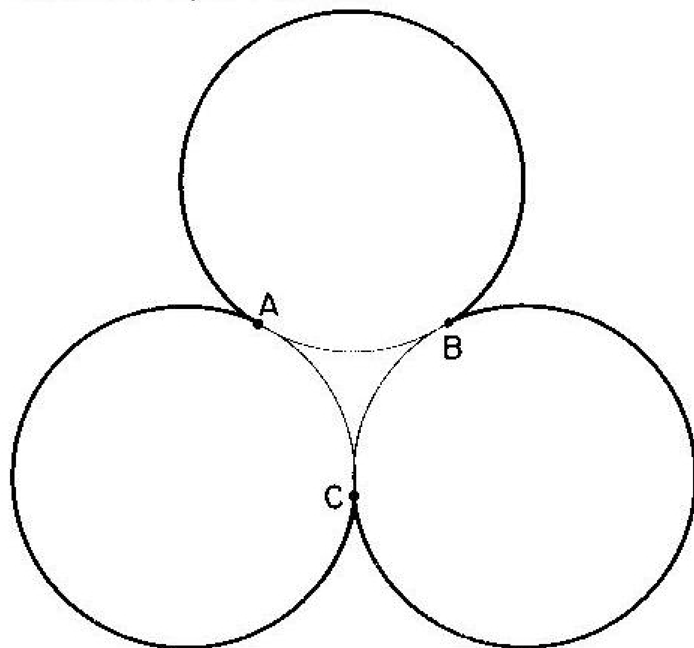
A) π
B) 2π
C) 4π
D) 6π
E) NRA.

385. Considere o quadrado de lado 6 da figura. Calcule o perímetro da figura assinalada.



A) 6π
B) 8π
C) 12π
D) 16π
E) NRA.

386. Os três círculos da figura são tangentes entre si, dois a dois, nos pontos A, B e C. Se o raio de cada um deles é igual a 1, o perímetro da figura curvilínea formada pelos maiores arcos AB, BC e CA mede:



A) 3π
B) 4π
C) 5π
D) 6π
E) 9π

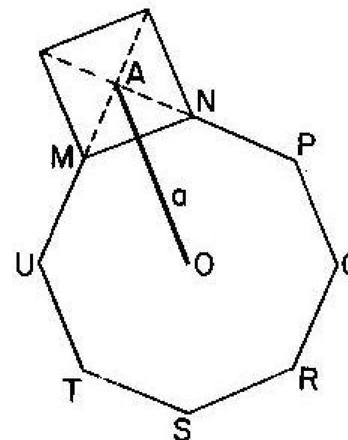
387. Duas diagonais de um pentágono regular de lado L cortam-se segundo dois segmentos m e n. Calcule estes segmentos em função de L.

388. Os pontos A, B, C e D são vértices consecutivos de um decágono regular de lado L inscrito em um círculo de centro O e raio R. A diagonal $\overline{AD}$ corta o raio $\overline{OB}$ em J. Calcule os segmentos $\overline{AJ}$ e $\overline{JD}$.

389. Calcule a razão entre os perímetros dos dodecágonos inscrito e circunscrito a um mesmo círculo.

390. Considere um pentágono regular convexo ABCDE de centro O. A reta AO encontra BE em M e DC em N. Demonstre que os pontos A, M, O e N formam uma divisão harmônica.

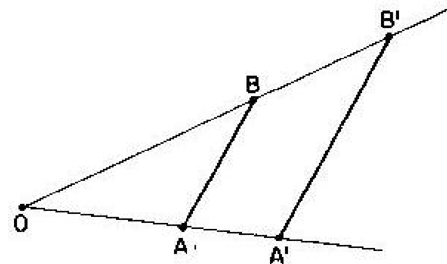
391. (IME — 67) A figura abaixo mostra o octógono MNPQRSTU e um quadrado construído tendo por base $\overline{MN}$. Sabendo que a distância entre o centro do círculo inscrito no octógono e o ponto de interseção das diagonais do quadrado é a, determine a área do quadrado em função de a.



APÊNDICE

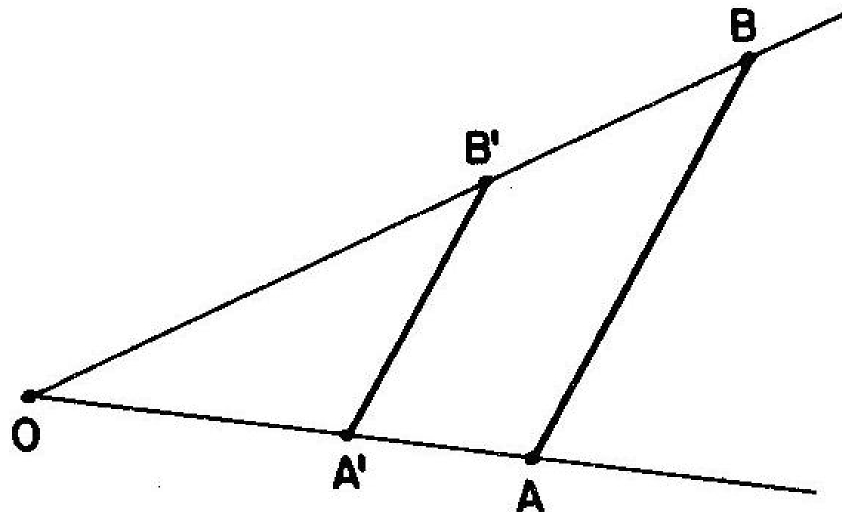
A-1 — HOMOTETIA

1.1 — Dados em um plano os pontos O e A, e um número real $k \neq 0$, chama-se *homotetia* de centro O e razão (ou característica) k à transformação que a todo ponto A faz corresponder um ponto A' tal que $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ chamaremos de Hom (O, K).

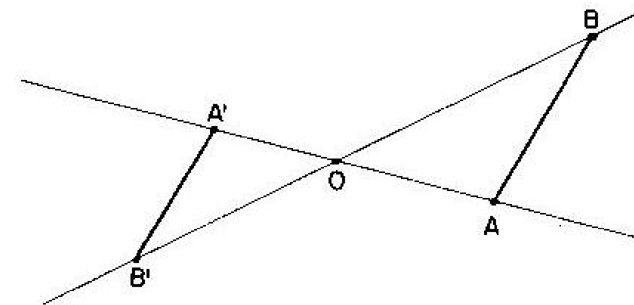


homotetia direta

K > 1



$O < K \leqslant 1$

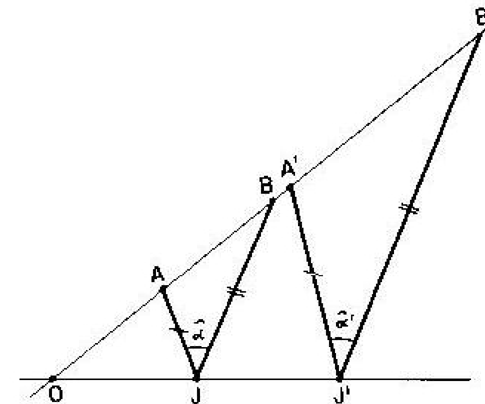


homotetia inversa

K < O. (*)

Da própria definição decorre que os triângulos CAB e OA'B' são semelhantes, sendo $\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$. Portanto, a homotetia transforma uma reta em outra paralela distinta, caso k seja diferente de O' e de 1, e caso a reta não contenha o centro O.

1.2 — A figura homotética de um ângulo $A\widehat{J}B$ é um ângulo $A'\widehat{J'}B'$ congruente com o primeiro.

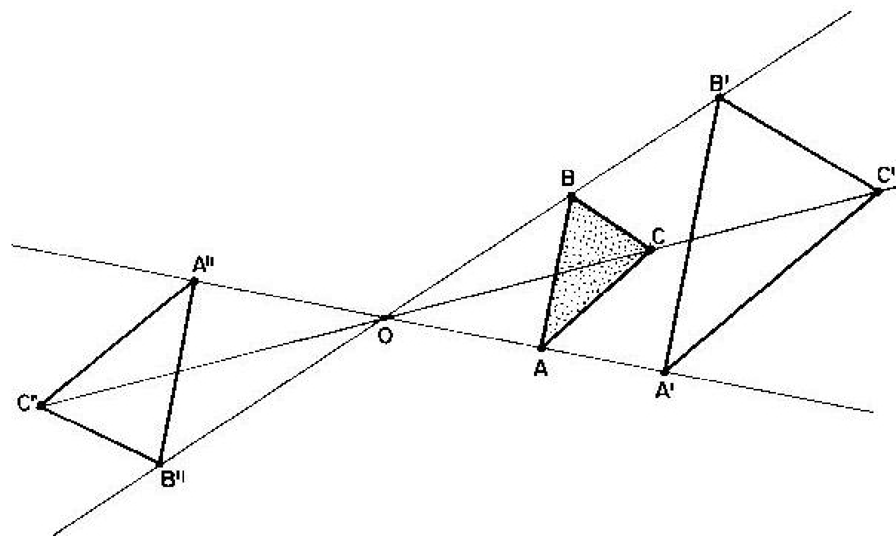


De fato, como $\overline{JA} \,//\, \overline{J'A'}$ e $\overline{JB} \,//\, \overline{J'B'}$, independentemente da razão, $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'$.

---

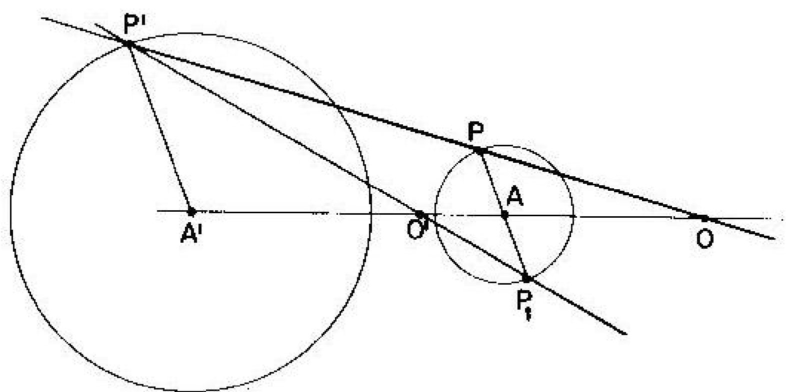
* Se k = − 1, a transformação é uma simetria de centro 0.

1.2.1 — A figura homotética de um triângulo (polígono) é um outro semelhante ao primeiro.



Este fato decorre imediatamente da definição e propriedades anteriores.

1.3 — A figura homotética de um círculo é um outro círculo.



Seja um círculo de centro A e raio R. Se o imaginarmos formado pelas extremidades dos segmentos AP, todos congruentes, a figura deste círculo transformada em uma homotetia será formada pelos extremos

dos segmentos $\overline{A'P'}$, todos congruentes e de comprimento igual a $|k|$ AP. Assim, concluímos que:

1) A figura transformada de um círculo (A, R) em uma Hom(O, K) é um círculo $(A', |K| R)$, onde $\overrightarrow{OA'} = K \cdot \overrightarrow{OA}$.

2) Dados dois círculos não concêntricos e de raios diferentes existem sempre duas homotetias que transformam um deles no outro.

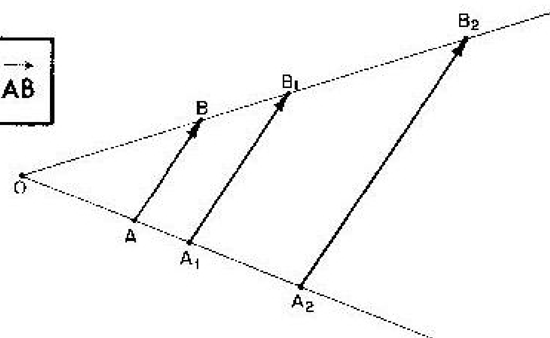
3) As tangentes comuns a dois círculos passam pelo centro de homotetia.

1.4 — Produto de homotetias

1.4.1. — Produto de homotetias de mesmo centro.

Sejam Hom (O, K_1) e Hom (O, K_2) duas homotetias. A primeira transforma um vetor $\overrightarrow{AB}$ em outro $\overrightarrow{A_1B_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ e a outra transforma $\overrightarrow{A_1B_1}$ em outro $\overrightarrow{A_2B_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. Por simples substituição vemos que

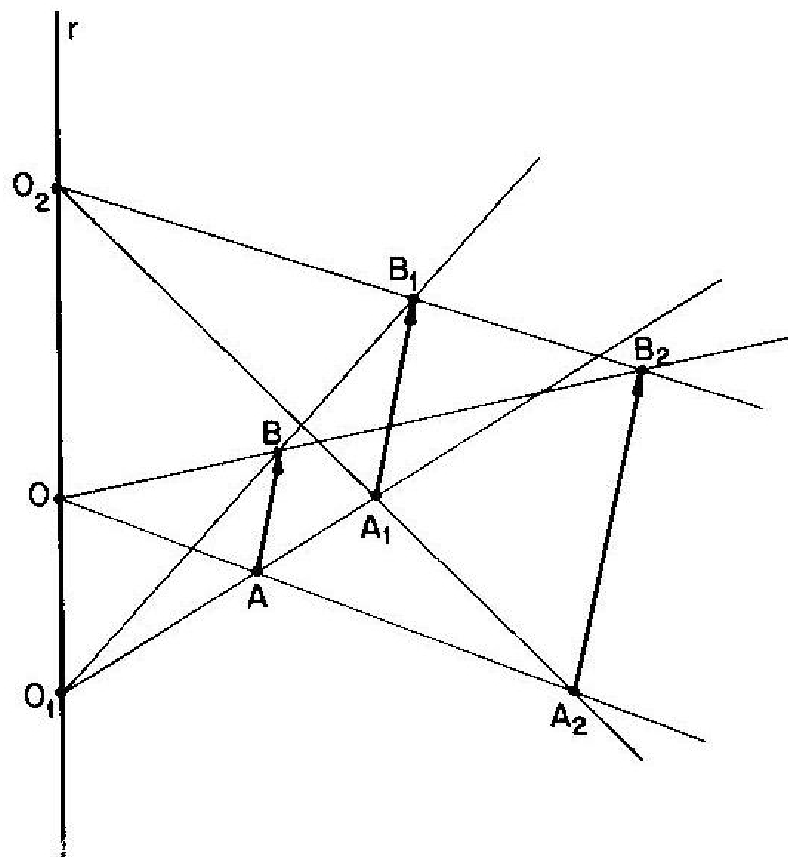
$$\overrightarrow{A_2B_2} = K_1 \cdot K_2 \cdot \overrightarrow{AB}$$



o que mostra que a Hom $(O, k_1 \cdot k_2)$ transforma $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{A_2B_2}$.

Vemos, também, que o produto de homotetias é comutativo, não influindo a ordem em que são feitas as transformações.

1.4.2. — Produto de homotetias de centros distintos.



Consideremos, agora, Hom (O_1, K_1) e Hom (O_1, K_2). A primeira transforma $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{A_1B_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ e a segunda transforma $\overrightarrow{A_1B_1}$ em $\overrightarrow{A_2B_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. Vemos também que, como

$$\overrightarrow{A_2B_2} = k_1 \cdot k_2 \cdot \overrightarrow{AB},$$

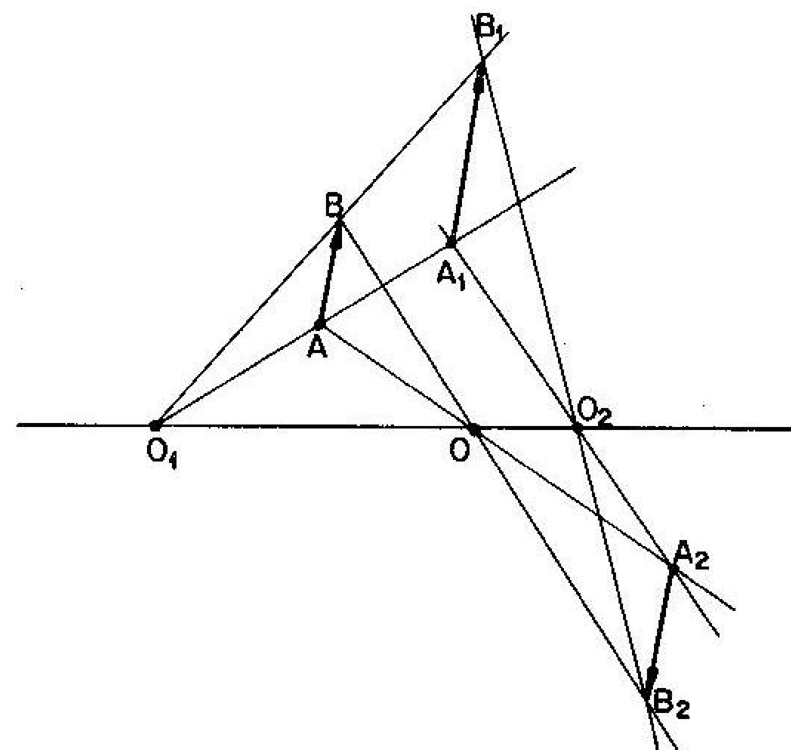
existe uma homotetia de centro O e razão $k_1 \cdot k_2$ que transforma $\overrightarrow{AB}$ e, $\overrightarrow{A_2B_2}$. (*)

* $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ para que exista O perfeitamente determinado.

Concluímos, ainda, que:

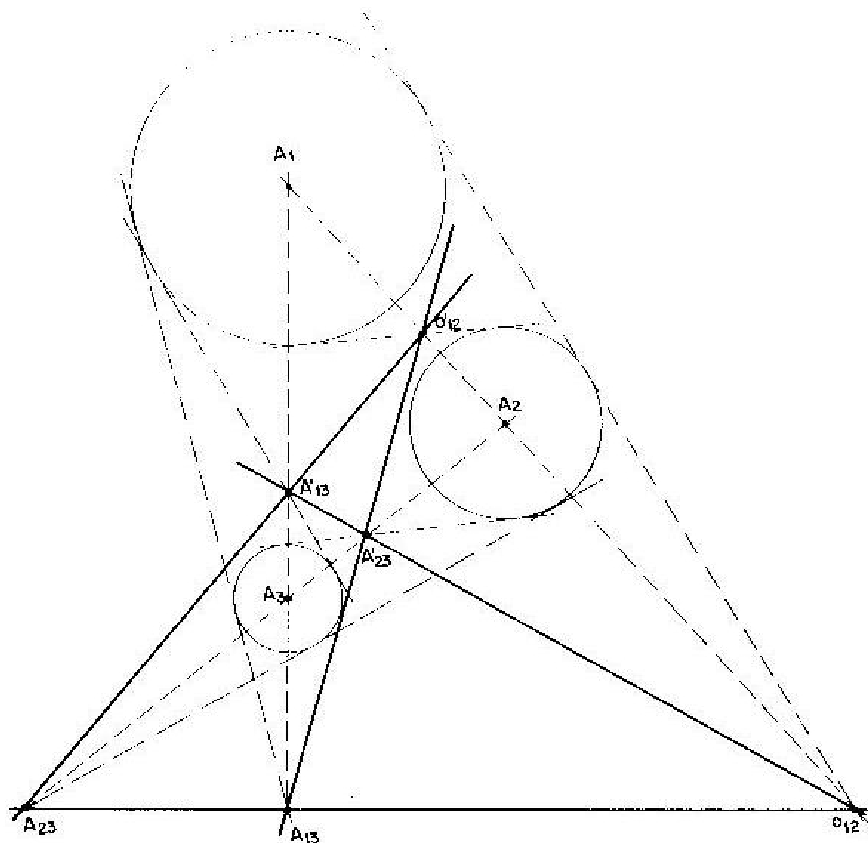
1) O, O_1 e O_2 são colineares.

De fato, seja r a reta que contém O_1 e O_2. Na primeira transformação, $r_1 \equiv r$ e, na segunda, $r_2 \equiv r_1 \equiv r$. Como $r_2 \equiv r$, então r contém o centro O da homotetia que transforma $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{A_2B_2}$.



2) A homotetia produto será *direta* se as duas primeiras forem ambas diretas ou ambas inversas e será *inversa* se uma for direta e outra inversa.

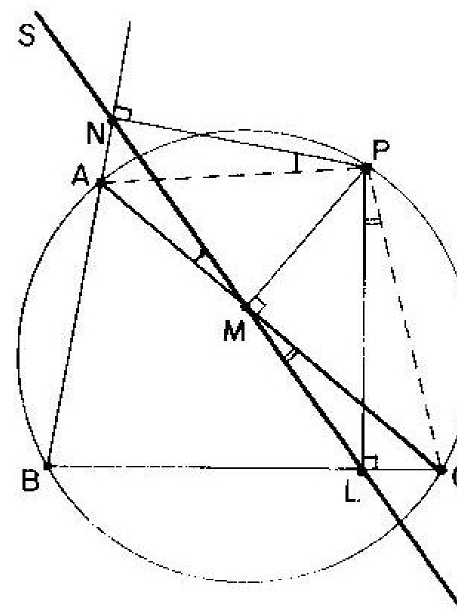
3) Três círculos de raios distintos e dois não concêntricos determinam sempre seis centros de homotetia.



Este fato decorre imediatamente das propriedades anteriores.

A-2 — A RETA DE SIMPSON-WALLACE

2.1 — Os pés das perpendiculares traçadas de um ponto do círculo circunscrito a um triângulo aos lados desse triângulo são colineares.



Porque os quadriláteros PMAN e PMLC são inscritíveis,

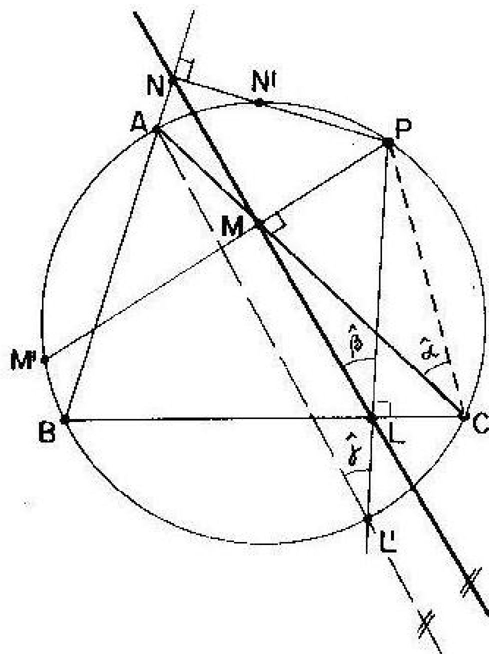
$$N\hat{P}A = N\hat{M}A \quad e \quad C\hat{P}L = C\hat{M}L.$$

Porque os quadriláteros BNPL e BAPC são inscritíveis,

$$N\hat{P}L = A\hat{P}C, \text{ pois são suplementos de } \hat{B}.$$

Logo, $N\hat{P}A = C\hat{P}L$ ou $N\hat{M}A = C\hat{M}L$, o que mostra que os pontos L, M e N são colineares. A reta que os contém é chamada reta de Simpson, reta de Wallace ou simplesmente simson do ponto P.

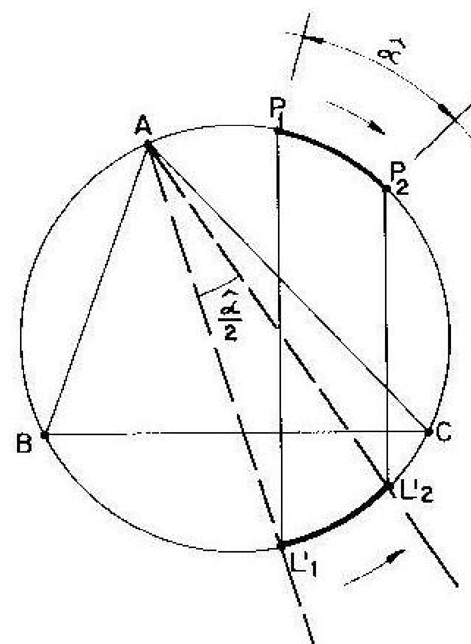
2.2 — Se as perpendiculares de um ponto P do círculo circunscrito a um triângulo ABC aos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ encontram novamente o círculo em L'', M' e N', as retas $\overline{AL'}$, $\overline{BM'}$ e $\overline{CN'}$ são paralelas à simson do ponto P.



$$\left.\begin{array}{ll} \widehat{\alpha} = \widehat{\gamma} & = \dfrac{\widehat{AP}}{2} \\ \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}. & \text{(quadrilátero inscritível PMLC)} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \widehat{\beta} = \widehat{\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AL'} \parallel S.$

2.3 — Se o ponto P move-se sobre o círculo circunscrito de um arco de medida $\widehat{\alpha}$, a reta de Simpson move-se de um ângulo de medida $\dfrac{\widehat{\alpha}}{2}$ no sentido contrário à rotação de P.



$\widehat{P_1P_2} = \widehat{L_1'L_2'} = \widehat{\alpha} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad L'_1 \widehat{A} L'_2 = \dfrac{\widehat{\alpha}}{2}.$

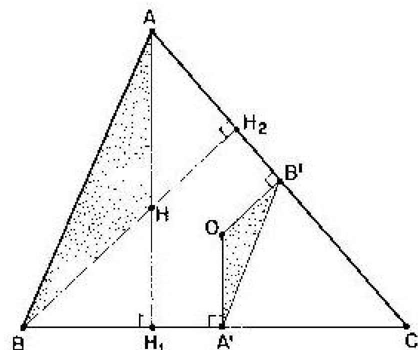
2.4 — A reta de Simpson de um ponto P divide ao meio o segmento que une o ortocentro do triângulo ao ponto P.

2.5 — Os simétricos de um ponto do círculo circunscrito em relação aos lados do triângulo inscrito estão sobre uma reta paralela à de Simpson passando pelo ortocentro do triângulo.

2.6 — O ângulo formado pelas retas de Simpson de um ponto P em relação a dois triângulos inscritos é o mesmo para qualquer posição de P.

A-3 — A RETA DE EULER — O CÍRCULO DOS NOVE PONTOS

3.1 — A distância de um circuncentro de um triângulo a um dos lados é a metade da distância do ortocentro ao vértice oposto.



Como $\overline{OA'} \,//\, \overline{HA}$,

$\overline{OB'} \,//\, \overline{HB}$,

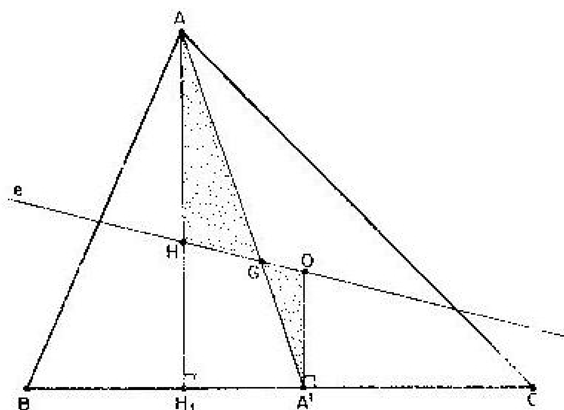
$\overline{A'B'} \,//\, \overline{AB}$, e

$$A'B' = \frac{1}{2}AB,$$

os triângulos $OA'B$ e HAB são semelhantes na razão $\frac{1}{2}$, sendo

$$\boxed{OA' = \frac{1}{2}HA.}$$

3.2 — Em um triângulo, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro estão alinhados.



Como A' é médio de $\overline{BC}$, $\overline{AA'}$ é uma mediana, os triângulos AHG e GOA' são semelhantes, e sendo $\frac{OA'}{HA} = \frac{1}{2}$ a razão de semelhança, então $GA' = \frac{1}{2}GA$, sendo G, portanto, o baricentro do triângulo.

A reta que contém o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo é chamada *reta de Euler* do triângulo.

3.3 — O baricentro de um triângulo divide o segmento que une o ortocentro ao circuncentro na razão $\frac{1}{2}$.

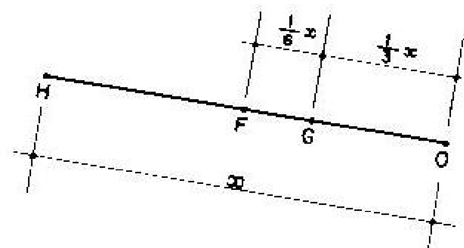
Como os triângulos AHG e GOA' são semelhantes na razão $\frac{OA'}{HA} = \frac{1}{2}$, logo

$$\boxed{GO = \frac{1}{2}GH.}$$

3.4 — Círculo dos nove pontos

Transformemos o círculo circunscrito de um triângulo pela $\text{Hom}\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Seja F o centro do novo círculo. Ele é tal que

$$GF = -\frac{1}{2}GO.$$

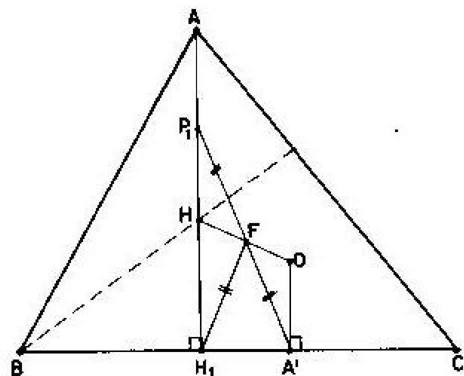


De acordo com a figura,

$$FO = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x$$

$$\Longrightarrow FO = \frac{1}{2}x$$

Logo, o centro do círculo transformado é o ponto médio do segmento $\overline{OH}$. Ora, segundo a Hom $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$, os pontos A, B e C transformam-se em A′, B′ e C′ médios dos lados do triângulo.



Como F é médio de $\overline{OH}$, $\overline{FA} = \overline{FH_1}$, o que mostra passar este círculo também pelos pés das alturas do triângulo. Da congruência dos triângulos FOA′ e FHP_1, temos

$$OA' = HP_1 = \frac{1}{2} HA.$$

Logo, P_1 é médio do segmento $\overline{HA}$ e, como $FA' = FP_1$, vemos também que este círculo passa pelos pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices e que são chamados de *pontos de Euler* do triângulo.

Como transformamos o círculo circunscrito segundo a Hom $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$, o raio do círculo dos nove pontos tem raio $\frac{R}{2}$.

Assim, o círculo dos nove pontos:

a) tem raio $\frac{R}{2}$,

b) tem centro no ponto F, médio de $\overline{OH}$,

c) contém

A′, B′, C′ → pontos médios dos lados

H_1, H_2, H_3 → pés das alturas

P_1, P_2, P_3 → pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices.

3.5 — Os triângulos ABC, BCH, CAH e ABH possuem o mesmo círculo dos nove pontos.

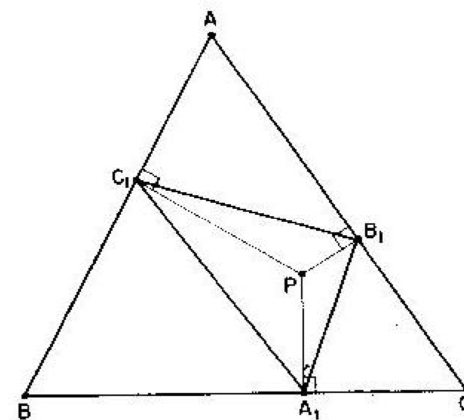
Observação: o círculo inscrito e os três círculos exinscritos são chamados de círculos tritangentes.

3.6 — **Teorema de Feuerbach**

Cada um dos triângulos ABC, BCH, CAH e ABH definem quatro círculos tritangentes. Estes 16 círculos são tangentes ao círculo dos nove pontos.

A–4 — TRIÂNGULOS PEDAIS

4.1 — Seja P um ponto do plano de um triângulo ABC e sejam $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_1}$ e $\overline{PC_1}$ as perpendiculares traçadas por P aos lados $\overline{BC}$ $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo. Se P não pertence ao círculo circunscrito, o triângulo $A_1B_1C_1$ é chamado *triângulo pedal de P*.



4.2 — Lados do triângulo pedal

Como AC_1PB_1 é inscritível, pela Lei dos Senos,

$$\frac{B_1C_1}{\text{sen } \hat{A}} = PA; \quad \text{mas} \quad \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R \implies$$

$$\implies \quad B_1C_1 = \frac{a \cdot PA}{2R}.$$

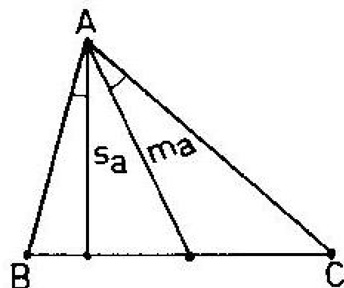
Assim, se x, y e z são as distâncias de P aos vértices A, B e C, os lados do triângulo pedal medem

$$\frac{ax}{2R}, \quad \frac{bx}{2R} \quad \text{e} \quad \frac{cx}{2R}.$$

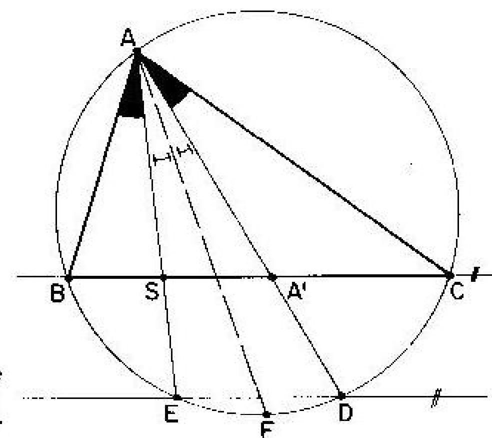
A-5 — AS SIMEDIANAS

5.1 — A isogonal de uma mediana chama-se *simediana*.

5.2 — A bissetriz de um ângulo de um triângulo é também bissetriz do ângulo formado pela mediana e simediana traçadas do mesmo vértice.

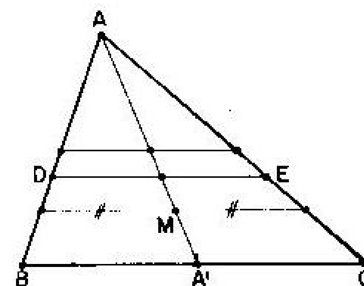


5.3 — Se D e E são os pontos em que a mediana e simediana encontram o círculo circunscrito a um triângulo ABC, então $\overline{DE}$ é paralela a $\overline{BC}$.

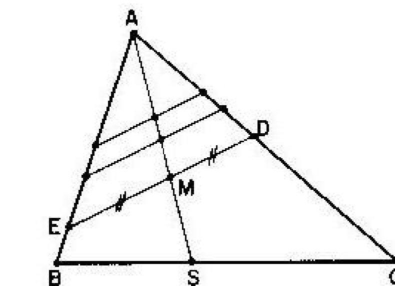


Como F é médio de $\widehat{BC}$ e $\widehat{BE} = \widehat{DC}$, logo $\overline{DE} \,/\!/\, \overline{BC}$.

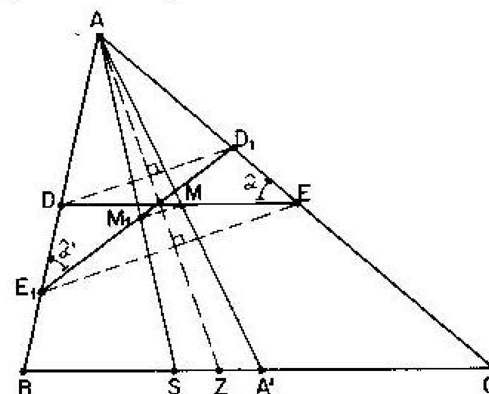
5.4 — A simediana relativa ao lado *a* de um triângulo ABC divide ao meio qualquer antiparalela ao lado $\overline{BC}$.



$\left.\begin{array}{l} AA' \to \text{mediana} \\ DE \,/\!/\, \overline{BC} \end{array}\right\} \implies DM = ME.$



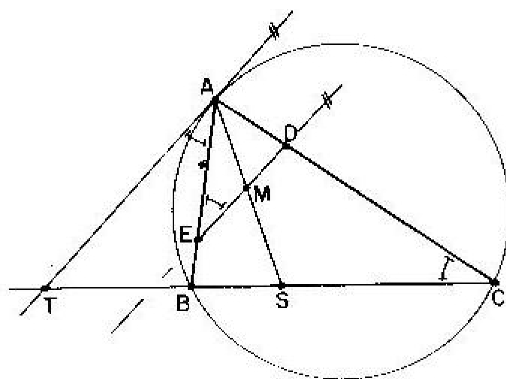
$\left.\begin{array}{l} AS \to \text{simediana} \\ DE \text{ anti } /\!/ \, \overline{BC} \end{array}\right\} \implies DM = ME.$



A demonstração é elementar. Seja $\overline{AA'}$ uma mediana, $\overline{DE} \,/\!/\, BC$, sendo M médio de $\overline{DE}$. A simetria em relação à bissetriz $\overline{AZ}$ do ângulo $\hat{A}$ leva a mediana $\overline{AA'}$ na simediana $\overline{AS}$, D em D_1, E em E_1 e M em M_1.

Concluímos imediatamente que $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'$, sendo, portanto, $\overline{D_1E_1}$ e BC antiparalelas em relação aos lados do ângulo $\widehat{A}$, e que, se M é médio do DE, então M_1 é médio de $\overline{D_1E_1}$.

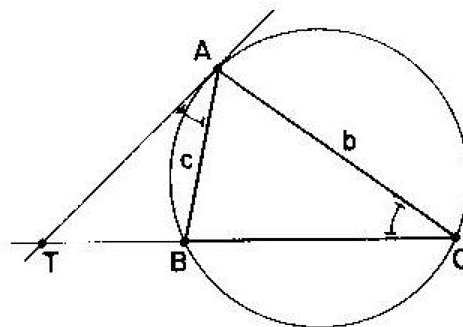
5.5 — Em um triângulo ABC, o pé da simediana e o pé da tangente ao círculo circunscrito, traçadas por A, dividem harmonicamente o lado $\overline{BC}$.



Ora, como $\widehat{C} = A\widehat{E}D = B\widehat{A}T$, a antiparalela $\overline{DE}$ é paralela à tangente $\overline{AT}$, e, como M é médio de $\overline{DE}$, o feixe A(TBSC) é harmônico (V. 3.9.2).

5.6 — O ponto S, pé da simediana traçada pelo vértice A de um triângulo ABC, divide o lado $\overline{BC}$ na razão $\frac{c^2}{b^2}$.

Como a razão $\frac{SB}{SC}$ é igual a $\frac{TB}{TC}$, calcularemos esta última.



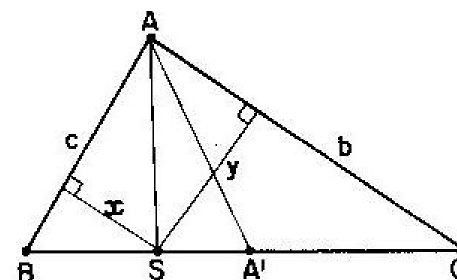
Da semelhança dos triângulos ABT e CAT, temos

$$\frac{TA}{TC} = \frac{c}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{TA^2}{TC^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\text{mas } TA^2 = TB \cdot TC \implies \frac{TB \cdot TC}{TC^2} = \frac{c^2}{b^2} \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{TB}{TC} = \frac{SB}{SC} = \frac{c^2}{b^2}}$$

5.7 — As distâncias de qualquer ponto da simediana aos lados adjacentes são proporcionais aos próprios lados.



Como os triângulos ASB e ASC possuem mesma altura em relação a $\overline{BC}$, a razão entre suas áreas é igual à razão $\frac{SB}{SC}$ de suas bases.

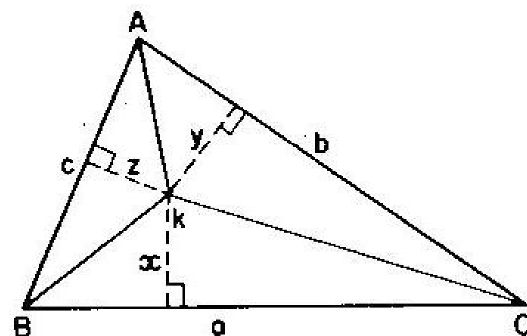
Assim,

$$\frac{S(ASB)}{S(ASC)} = \frac{SB}{SC} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{cx}{2}}{\frac{by}{2}} \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{x}{y} = \frac{c}{b}}$$

5.8 — As três simedianas de um triângulo são concorrentes.

Seja K o ponto de concurso das simedianas S_a e S_b.



$K \in S_a \Longrightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

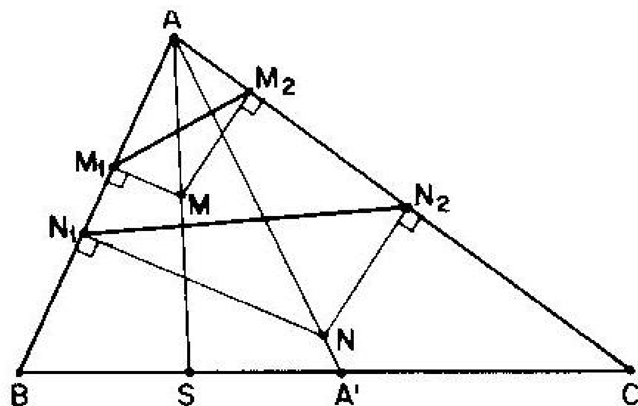
$K \in S_b \Longrightarrow \frac{z}{c} = \frac{x}{a}$

Concluímos que $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$,

ou seja, $K \in S_c$.

O ponto K, de concurso das simedianas, é chamado *ponto de Lemoine* e é o único ponto cujas distâncias aos lados são proporcionais aos próprios lados. Além disso, devemos notar que o ponto K forma os triângulos KBC, KAC e KAB, de áreas proporcionais a a^2, b^2 e c^2, respectivamente.

5.9 — Se por um ponto de uma simediana (mediana) traçarmos perpendiculares aos lados adjacentes, o segmento que une os pés dessas perpendiculares é perpendicular à mediana (simediana) correspondente.



Como AM_1MM_2 é inscritível, $M_1\hat{A}M = M_1\widehat{M_2}M = A'\hat{A}C$, o que mostra ser $\overline{M_1M_2}$ perpendicular a $\overline{AA'}$. Da mesma forma demonstramos que $\overline{N_1N_2}$ é perpendicular a $\overline{AS}$.

Concluímos, ainda, que:

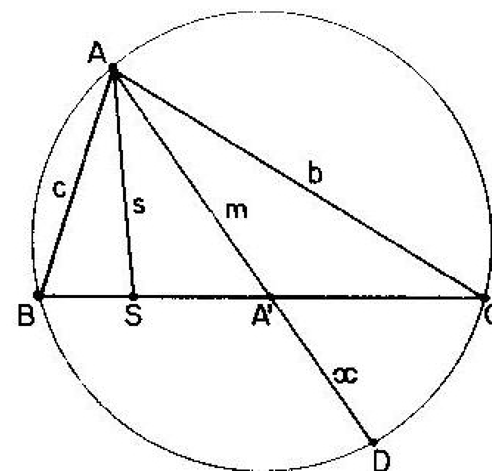
1) M_1M_2 e N_1N_2 são antiparalelas em relação ao ângulo $\hat{A}$.

2) M_1, M_2, N_2 e N_1 são concíclicos.

De fato, pois se $A\widehat{M_1}M_2 = A\widehat{N_1}N_2$, os triângulos AM_1M_2 e AN_1N_2 são semelhantes e $AM_1 \cdot AN_1 = AM_2 \cdot AN_2$, demonstrando as proposições acima.

Devemos notar que estas propriedades valem para duas cevianas isogonais quaisquer e as demonstrações são inteiramente análogas.

5.10 — Comprimento de uma simediana.



Sejam m e s o comprimento da mediana e simediana relativas ao lado *a* de um triângulo ABC. A mediana $\overline{AA'}$ corta o círculo circunscrito em D, e seja $A'D = x$.

Sabemos que

$$bc = S \cdot AD \quad \therefore \quad S = \frac{bc}{AD} \qquad (1)$$

mas $m \cdot x = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \implies x = \frac{a^2}{4m}$

$$AD = m + x = m + \frac{a^2}{4m} = \frac{4m^2 + a^2}{4m}$$

$$AD = \frac{4 \cdot \frac{1}{4}\left[2(b^2 + c^2) - a^2\right] + a^2}{4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}} = \frac{b^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$$

Levando em (1),

$$S = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}$$

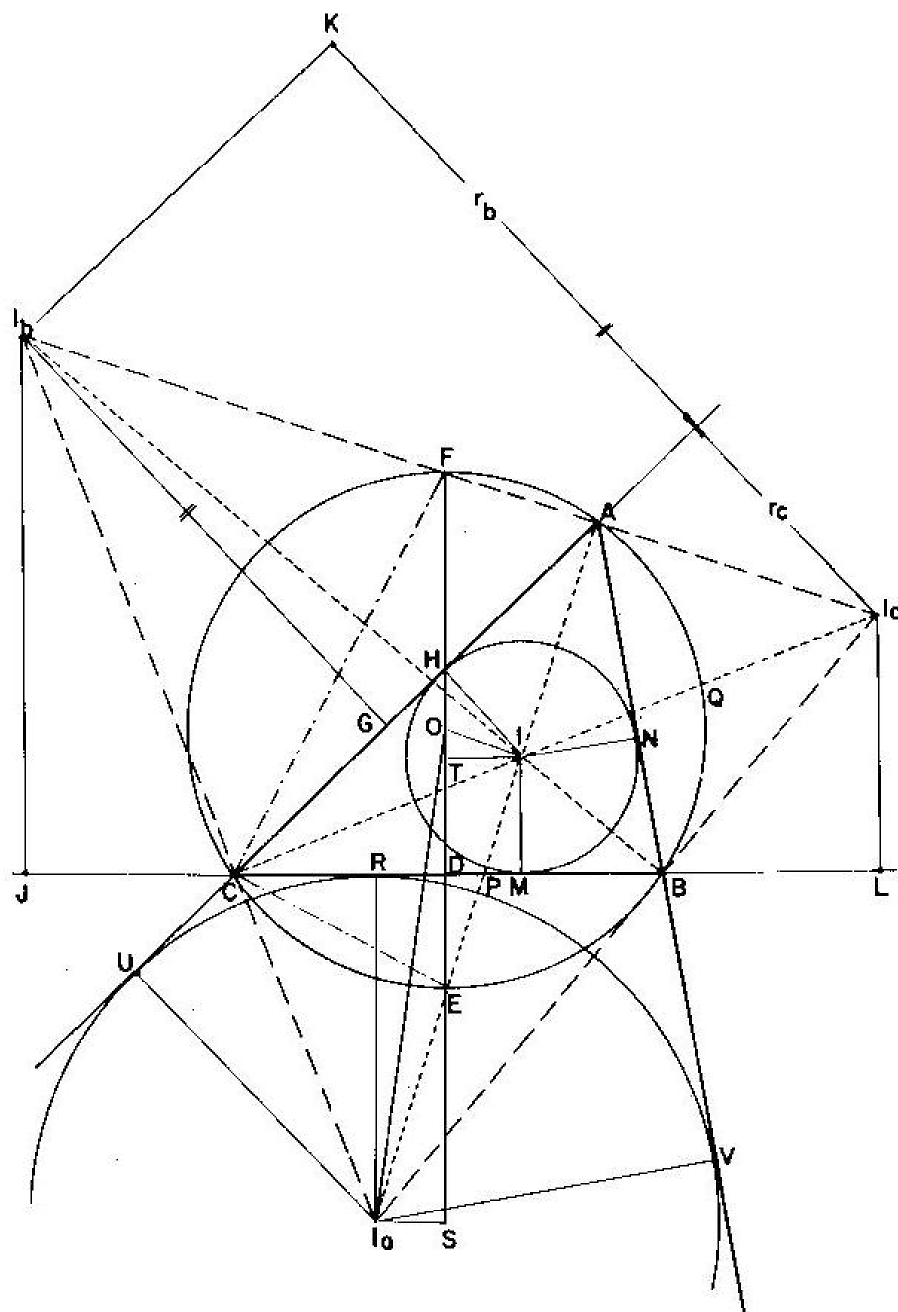
Analogamente, se

$$S_a = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2},$$

então

$$S_b = \frac{ac}{a^2 + c^2}\sqrt{2\,(a^2 + c^2) - b^2} \quad \text{e}$$

$$S_c = \frac{ab}{a^2 + b^2}\sqrt{2\,(a^2 + b^2) - c^2}$$



A-6 — AS FÓRMULAS DE EULER

6.1 — Relação dos cinco raios

Considerando a figura da página anterior, verificamos inicialmente que as bissetrizes $\overline{AI_a}$ e $\overline{AI_b}$ são perpendiculares e que $\overline{EF}$ é um diâmetro perpendicular a $\overline{BC}$ em seu ponto médio D.

No trapézio $I_b\,JLI_c$, temos

$$\left.\begin{matrix} BJ = p \\ CL = p \end{matrix}\right\} \Longrightarrow JC = BL$$

Como D é médio de $\overline{JL}$, $\overline{DF}$ é base média, sendo

$$DF = \frac{r_b + r_c}{2} \qquad (1)$$

Temos ainda

$$BM = p - b = AU = AC - UC = CR \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} CR = BM \\ RD = DM \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} C\hat{I}E = E\hat{C}I = \dfrac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \\ C\hat{I_a}E = I_a\hat{C}E \end{matrix}\right\} \Longrightarrow EB = EC = EI = EI_a$$

Se D e E são médios de $\overline{RM}$ e $\overline{II_a}$, então podemos escrever

$$DE = \frac{r_a - r}{2} \qquad (2)$$

Como $DE + DF = 2R$,

$$2R = \frac{r_b + r_c}{2} + \frac{r_a - r}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{4R = r_a + r_b + r_c - r}$$

6.2 — Distância do incentro ao circuncentro

No triângulo OIE, temos

$$OI^2 = OE^2 + IE^2 - 2OE \cdot ET, \qquad \text{mas}$$

$$IE^2 = EC^2 = 2R \cdot ED \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow OI^2 = R^2 + 2R\,(ED - ET) = R^2 - 2R\,(ET - ED) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}}$$

6.3 — Distância do circuncentro a um exincentro

No triângulo OI_aE, temos

$$OI_a^2 = OE^2 + EI_a^2 + 2 \cdot OE \cdot ES, \qquad \text{mas}$$

$$EI_a^2 = CE^2 = 2R \cdot ED \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow OI_a^2 = R^2 + 2R\,(ED + ES) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} OI_a = \sqrt{R^2 + 2R\,r_a} \\ OI_b = \sqrt{R^2 + 2R\,r_b} \\ OI_c = \sqrt{R^2 + 2R\,r_c} \end{matrix}}$$

e, analogamente, e

6.4 — Distância do incentro a um exincentro

Temos

$$II_a = 2\,EI_a = 2\,CE^2$$

$$II_a^2 = 4 \cdot CE^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow II_a^2 = 4 \cdot 2R \cdot ED, \qquad \text{mas} \qquad ED = \frac{r_a - r}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} II_a &= 2\sqrt{R(r_a - r)} \\ II_b &= 2\sqrt{R(r_b - r)} \\ II_c &= 2\sqrt{R(r_c - r)} \end{aligned}}$$

e, analogamente,

e

6.5 — Distância entre dois exincentros

Calculemos I_bI_c.

$FI_b = FI_c$, sendo $\overline{CF}$ mediana no triângulo retângulo I_bCI_c.

$2CF = I_bI_c$

$I_bI_c^2 = 4\ CF = 4 \cdot 2R \cdot FD,$

mas $FD = \dfrac{r_b + r_c}{2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} I_bI_c &= 2\sqrt{R(r_b + r_c)} \\ I_aI_b &= 2\sqrt{R(r_a + r_b)} \\ I_aI_c &= 2\sqrt{R(r_a + r_c)} \end{aligned}}$$

e, analogamente,

e

6.6 — Exemplos

6.6.1 — Calcular o raio do círculo circunscrito a um triângulo sabendo que o circuncentro e os exincentros relativos a *a* e *b* formam um triângulo equilátero de 4 m de lado.

Solução

Pelas fórmulas de Euler, temos

$OI_a = \sqrt{R^2 + 2R\ r_a}$

$OI_b = \sqrt{R^2 + 2R\ r_b}$

$I_aI_b = 2\sqrt{R(r_a + r_b)}$

Das duas primeiras vemos que $r_a = r_b$.

Na última, temos

$4 = 2\sqrt{R(2\,r_a)}$ ou

$R \cdot r_a = 2.$

Levando na primeira, temos

$$16 = R^2 + 2 \cdot 2 \Longrightarrow R^2 = 12 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{R = 2\sqrt{3}\,m}$$

6.6.2 — No problema anterior, calcule os raios dos círculos exinscrito e inscrito.

Solução

Do problema anterior,

$$\left.\begin{aligned} R \cdot r_a &= 2 \\ R &= 2\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow r_a = r_b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Calculamos r_c e r pelas relações

$$4R = r_a + r_b + r_c - r \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

6.6.3 — Em um triângulo de lados 4, 6 e 8, calcule, se possível, o comprimento da tangente traçada pelo circuncentro ao círculo inscrito.

Solução

Calculemos a área do triângulo.

$$S = \sqrt{9(1)(3)(5)} = 3\sqrt{15}\ \text{a.a.}$$

Os raios dos círculos inscrito e circunscrito medem

$$S = pr \Longrightarrow 3\sqrt{15} = 9r \Longrightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$abc = 4RS \Longrightarrow 4 \cdot 6 \cdot 8 = 4 \cdot R \cdot 3\sqrt{15} \Longrightarrow R = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

A distância d entre o incentro e o circuncentro é dada por uma das fórmulas de Euler.

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

$$d^2 = \frac{16^2}{15} - 2\,\frac{16\sqrt{15}}{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$d^2 = \frac{16^2}{15} - \frac{32}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d^2 = \frac{96}{15}$$

Podemos, então, calcular a potência do circuncentro em relação ao círculo inscrito

$$Pot_{(I)}\, O = d^2 - r^2$$

$$Pot_{(I)}\, O = \frac{96}{15} - \frac{5}{3}$$

$$Pot_{(I)}\, O = \frac{71}{15}$$

Como a potência é positiva, o circuncentro é exterior ao círculo inscrito e, neste caso, a potência é dada pelo quadrado do segmento da tangente. Logo, o comprimento t pedido é

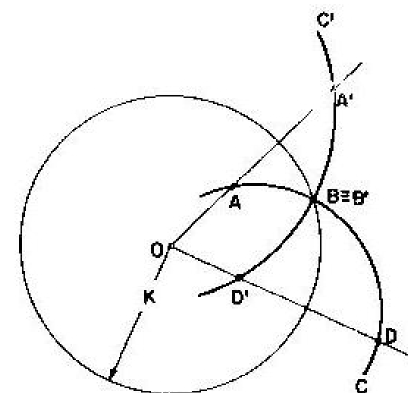
$$\boxed{t = \sqrt{\frac{71}{15}}}$$

A-7 — INVERSÃO

7.1 — Definição

Consideremos um ponto O de um plano Z. Chamamos de inversão positiva de centro O e raio K a transformação em Z que faz corresponder a cada ponto P de Z um ponto P′ da semi-reta OP, tal que

$$OP \cdot OP' = K^2$$



Os pontos do círculo de centro O e raio K são duplos. Se duas curvas C e C′ são inversas, a sua interseção está necessariamente sobre este círculo. Os pontos A e A′, B e B′, C e C′ são pontos inversos e escreveremos

$$A' = Inv(A), \quad B' = Inv(B) \quad e \quad C' = Inv(C)$$

e vice-versa.

7.2 — Produto de inversões de mesmo centro

Consideremos a inversão de centro O e raio K_1 que leva P em P_1 e a inversão de centro O e raio K_2 que leva P_1 em P_2. Então,

$$OP \cdot OP_1 = K_1^2 \qquad e$$

$$OP_1 \cdot OP_2 = K_2^2.$$

Dividindo membro a membro, obtemos

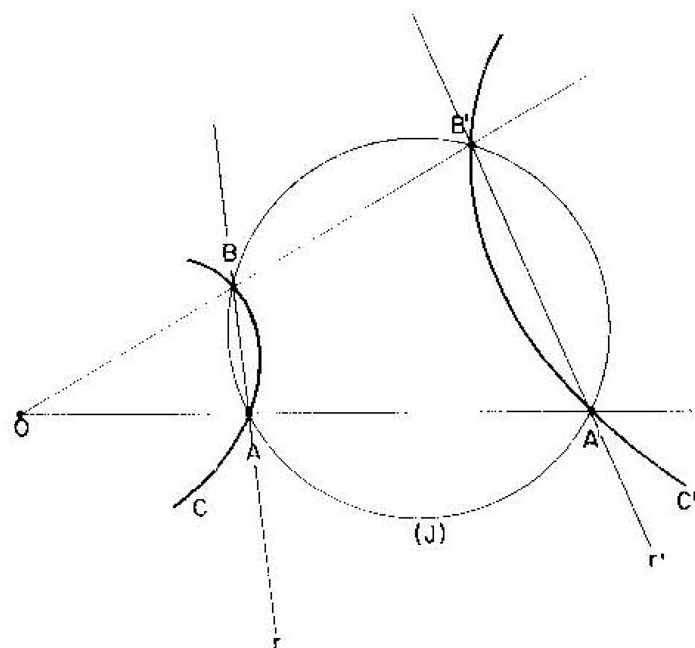
$$OP_2 = OP \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^2$$

Vemos, então, que o produto de duas inversões de mesmo centro e raios K_1 e K_2 é uma homotetia de centro O e razão $\left(\frac{K_2}{K_1} \right)^2$

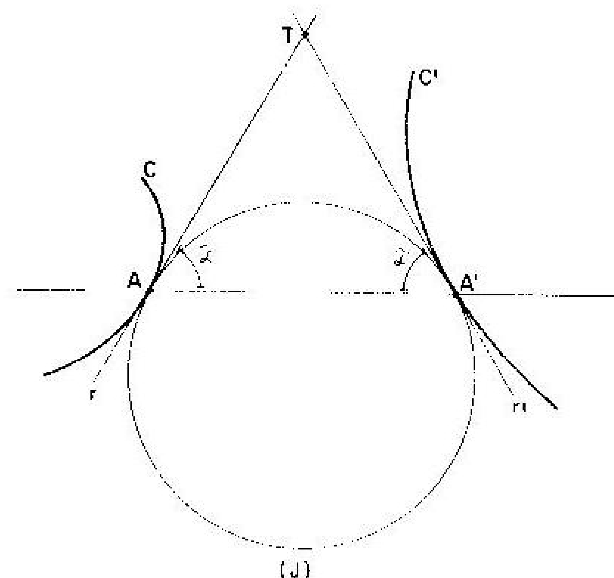
7.3 — Isogonalidade

7.3.1 — Teorema

Se dois pontos A e A′ pertencem, respectivamente, às curvas inversas C e C′, as tangentes a essas curvas em A e A′ formam ângulos iguais com a reta AA′.



Consideremos os pares de pontos inversos A e A′ e B e B′. Porque OA · OA′ = OB · OB′, os pontos A, B, A′ e B′ pertencem a um mesmo círculo, sendo r e r' antiparalelas em relação a O. Se B tende a A, B′ tende a A′ e, quando B = A, B′ = A′. O círculo (J) será, então, tangente às curvas C e C′ em A e A′, respectivamente, e as retas r e r' serão tangentes a esse círculo e às curvas C e C′.

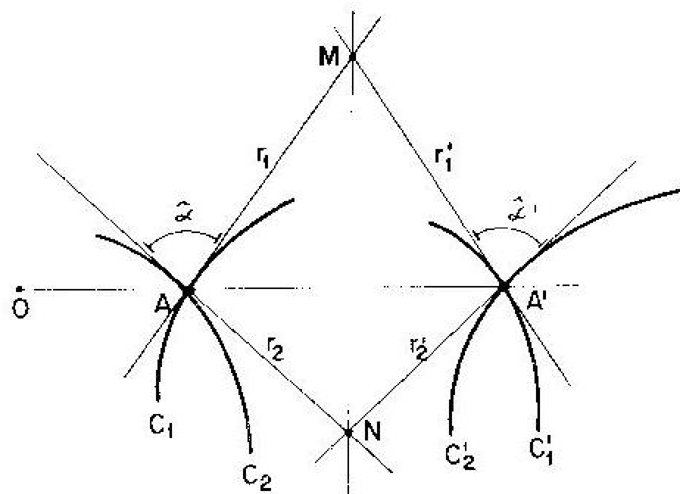


Vemos imediatamente que

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'.$$

7.3.2 — Teorema

Se duas curvas C_1 e C_2 formam ângulo α em um ponto de interseção A, as suas inversas C_1' e C_2', na mesma inversão, formarão ângulo α em um ponto de interseção A′, inverso de A.



Porque os triângulos MAA' e NAA' são isósceles, pelo teorema anterior, concluímos imediatamente que

$$\alpha = \alpha'.$$

7.4 — Transformação do círculo por inversão

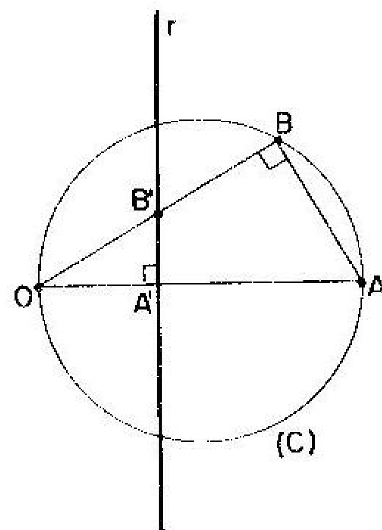
7.4.1 — O pólo é um ponto do círculo

Quando o pólo O de inversão é um ponto do círculo, a figura inversa do círculo é uma reta perpendicular ao diâmetro que passa por O.

Seja A' do diâmetro $\overline{OA}$ tal que

$$OA \cdot OA' = K^2.$$

Consideremos a reta r, que contém A' e é perpendicular a $\overline{OA}$. Seja B um ponto do círculo.



Vamos provar que B', ponto que r intercepta $\overline{OB}$, é o inverso de B.

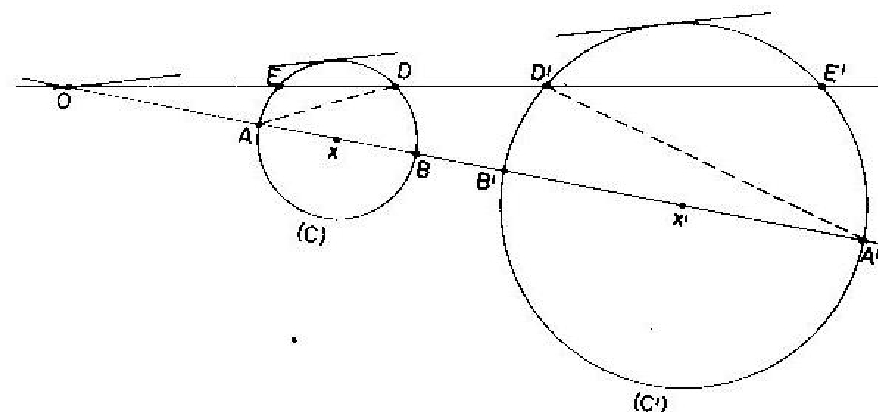
Sendo os triângulos OA'B' e OBA semelhantes, temos

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA} \Longrightarrow OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = K^2$$

Então, como B' = Inv (B), mostramos que

$$r = \text{Inv}\,(C).$$

7.4.2 — O pólo não pertence ao círculo



Quando o pólo de inversão não pertence ao círculo, a sua figura inversa é um outro círculo homotético do primeiro, numa homotetia de mesmo centro.

Sejam A' = Inv(A) e B' = Inv(B).

Consideremos o círculo de diâmetro $\overline{A'B'}$. Temos, então,

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = K^2 \Longrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'},$$

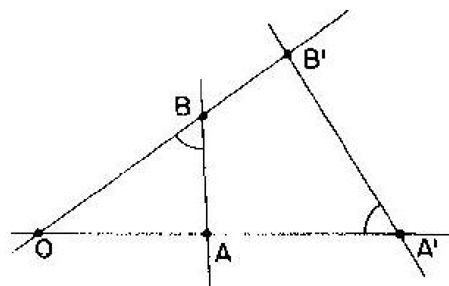
o que mostra que (C') é homotético de (C), numa homotetia de centro O. Temos ainda, considerando uma secante qualquer,

$$\widehat{AE} = \widehat{B'D'} \Longrightarrow \triangle OAD \sim \triangle OD'A' \Longrightarrow \frac{OD}{OA'} = \frac{OA}{OD'}$$

$$OD \cdot OD' = OA \cdot OA' = K^2.$$

Então, $C' = \text{Inv}\,(C)$.

7.5 — Distância entre dois pontos inversos



Sejam $A' = \text{Inv}(A)$ e $B' = \text{Inv}(B)$.

Porque as retas AB e A'B' são antiparalelas, os triângulos OAB e OB'A' são semelhantes. Logo,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA}$$

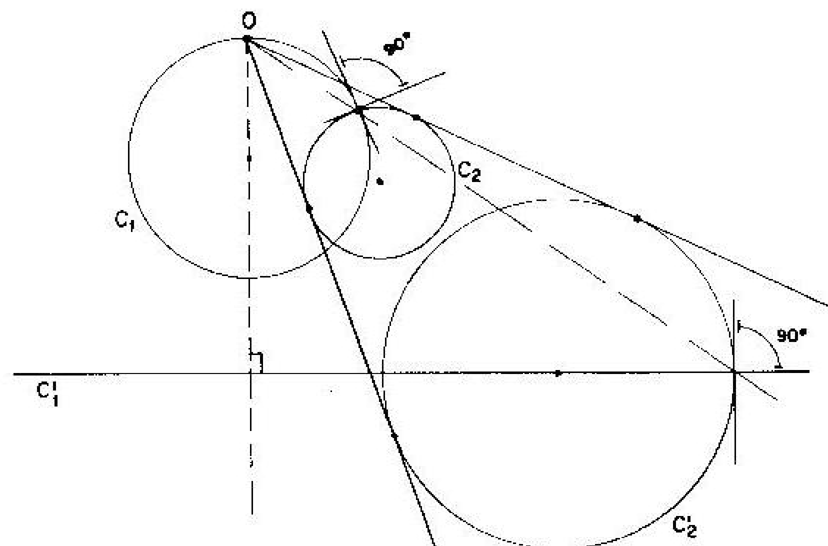
$$\Longrightarrow A'B' = AB \cdot \frac{OB'}{OA}.$$

Mas $OB' = \dfrac{K^2}{OB}$. Então,

$$\boxed{A'B' = AB \cdot \frac{K^2}{OA \cdot OB}}$$

7.6 — Observação

Se dois círculos são ortogonais, a inversão cujo pólo é um ponto de um dos círculos transforma estas figuras num círculo e numa reta que passa pelo centro deste.



Este fato decorre imediatamente de 7.4 e 7.3.2.

7.7 — Aplicações

1) Demonstrar que, em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos. (Teorema de Ptolomeu).

Sugestão

Transforme círculo em reta, numa inversão de pólo A. Como $B'D' = B'C' + C'D'$, aplique o resultado encontrado em 7.4.

2) Considere um quadrilátero ABCD. Prove que, se os círculos circunscritos aos triângulos ABC e ADC forem ortogonais, os círculos circunscritos aos triângulos ABD e CBD também o serão.

Sugestão

Transforme os círculos (ABC) e (ADC) em retas, por inversão de pólo A. Lembre que essas retas são perpendiculares.

3) Considerando o quadrilátero do problema anterior, se a, b, c e d são os comprimentos dos lados, e p e q, os das diagonais, prove que

$$p^2q^2 = a^2c^2 + b^2d^2$$

4) Os pontos A, B, C e D formam uma divisão harmônica. Transformemos, por inversão de pólo A, os pontos B, C e D. Se $B' = \text{Inv}(B)$, $C' = \text{Inv}(C)$ e $D' = \text{Inv}(D)$, prove que B' é o ponto médio de $\overline{C'D'}$.

5) Se um círculo é tangente internamente ao círculo circunscrito de um triângulo ABC e é tangente em P e Q a dois lados do triângulo, prove que o incentro do triângulo ABC é o ponto médio de $\overline{PQ}$.

Sugestão

Transforme os dois círculos, utilizando uma inversão de pólo A e raio $\overline{AI}$.

RESPOSTAS DOS TESTES

8 — B	15 — E	31 — D	38 — A
9 — D	16 — C	32 — C	39 — C
10 — D	17 — D	33 — B	40 — B
11 — C	18 — C	34 — A	51 — D
12 — A	19 — C	35 — C	52 — B
13 — C	20 — C	36 — E	53 — A
14 — B	30 — C	37 — A	54 — C

55 — C	102 — D	139 — B	214 — D
56 — C	103 — D	140 — D	215 — A
57 — D	104 — C	155 — C	216 — E
58 — E	105 — A	156 — D	217 — E
59 — D	106 — E	157 — D	218 — B
60 — A	107 — E	158 — C	219 — C
61 — C	108 — A	159 — A	220 — C
62 — C	109 — B	160 — E	221 — D
63 — D	110 — C	161 — C	222 — C
64 — D	111 — B	162 — A	223 — D
65 — B	112 — C	163 — C	224 — A
66 — B	113 — C	164 — D	225 — C
67 — A	114 — C	165 — B	226 — A
68 — C	115 — D	166 — A	227 — B
69 — C	116 — D	167 — D	228 — D
70 — D	117 — B	168 — B	229 — E
71 — A	118 — B	169 — D	230 — B
72 — C	119 — C	170 — C	231 — B
73 — E	120 — A	171 — A	232 — D
74 — A	121 — B	172 — D	233 — C
75 — B	122 — C	173 — B	234 — C
76 — B	123 — B	174 — C	235 — E
77 — B	124 — C	175 — A	236 — C
78 — A	125 — A	176 — D	237 — C
79 — A	126 — D	177 — C	238 — D
80 — C	127 — E	178 — D	239 — A
91 — D	128 — C	179 — C	240 — A
92 — C	129 — D	180 — B	241 — B
93 — D	130 — C	181 — C	242 — C
94 — D	131 — B	206 — C	243 — D
95 — D	132 — E	207 — A	244 — E
96 — B	133 — B	208 — C	245 — B
97 — B	134 — B	209 — C	246 — B
98 — E	135 — C	210 — D	247 — D
99 — A	136 — C	211 — C	248 — C
100 — C	137 — D	212 — D	249 — D
101 — C	138 — C	213 — C	250 — B

251 — C
252 — A
253 — D
254 — C
255 — B
256 — A
257 — D
258 — C
259 — D
260 — D
261 — B
262 — E
263 — A
264 — D
265 — A
266 — D
281 — A
282 — C
283 — D
284 — D
285 — E
286 — A
287 — B
288 — D
289 — B
290 — A
291 — C
292 — B
293 — C
294 — B
295 — C
296 — B
297 — C
298 — A
299 — D
300 — D
305 — D
306 — D
307 — B
308 — C
309 — A
310 — C
311 — A
312 — E
313 — D
314 — B
315 — C
316 — E
317 — B
318 — B
326 — C
327 — A
328 — A
329 — C
330 — D
331 — C
332 — B
333 — B
334 — A
335 — E
336 — C
337 — D
338 — B
339 — E
340 — A
341 — E
342 — D
343 — C
344 — D
359 — A
360 — C
361 — A
362 — C
363 — E
364 — B
365 — D
366 — C
367 — D
368 — C
369 — C
370 — B
371 — D
372 — B
373 — D
374 — C
375 — C
376 — A
377 — D
378 — B
379 — C
380 — C
381 — D
382 — B
383 — D
384 — C
385 — B
386 — C